J.R. ウィークス著

曲面と3次元多様体を視る

—空間の形—

三村　護・入江晴栄 訳

現代数学社

The Shape of Space

by

Jeffrey R. Weeks

序

高校時代の私がまず興味をもったのはメービウスの帯とクラインの壺でした．それが「位相数学」と呼ばれるものの一部であることは知っていました．それについてもっと学びたいと思ったのですが，残念ながら，学校の図書館にも公立図書館にも位相数学に関する書物はあまりありませんでした．恐らく，大学に入れば位相数学についてもっと勉強できるだろうと思っていましたが，大学においても 4 年生になるまで位相数学の講義を聴講することさえできず，また，その時になってもやっと極端に一般化した講義（位相空間論）と，専門的な技法を羅列したもう一つの講義（代数的位相幾何学）を履修できただけでした．位相数学の最も美しい例を完全に飛び越えて進んだのです．

本書 The Shape of Space（空間の形）は，メービウスの帯とクラインの壺等の最も簡単な例と，大学の上級講義にある高等数学との溝を埋めるものです．本書は広範な読者層を対象にして書かれています．つまり，数学に興味をもつ数学者でない人（恐らくメービウスの帯について聞いたことがあり，もっと学習したいと思っている高校生）を主な対象として書きました．しかし，今では大学や大学院のカリキュラムから失われている直観的な例も含めています．

私は読者に，まだ本書がどういうことを扱うものか述べてはいませんし，題名の説明さえしていません．それについては第 1 章をお読み下さい．

Jeffrey R. Weeks

謝　辞

種々な草稿を読んで下さり，改善すべきご教示を下さった方々のご援助なしには本書は陽の目を見ることがなかったでしょう．特に，Beth Christie, Bill Dunbar, Charles Harris, Geoff Klineberg, Skona Libowitz, Robert Lupton, Marie McAllister, Thea Pignataro, Evan Romer, Bruce Solomon, Harry Voorhees, Eric White の方々，および，最初の草稿に対する匿名の校閲者（レビューアー）のご意見は役に立ちました．また，コンピューター資料を戴いたプリンストン大学数学教室；（直接あるいは郵送で）作図のレッスンをして戴いた George Francis；また，絵の批評をして戴いた Nadia Marano と Craig Shaw；書名をご教示下さった Rudy Rucker；第18章に述べる数学の考案して下さった Bill Thurston；また実験台になって貰った Stockton 州立大学の私の幾何の学生諸君；これらの方々に感謝の意を表します．

Natalia Panczyszyn Kozlowski には表紙絵をお願いした．この絵は 3 次元トーラスの風景を示しています．3 次元トーラスは第 2 章で導入されます．第 7 章ではその不思議な視覚的効果を説明しています．3 次元トーラスという空間は有限であるが縁がない宇宙のありうる 1 つの形です．

図 3.3, 9.8, 10.4, 14.6 は W. Thurston と J. Weeks による The Mathematics of Three-dimensional Manifolds (Scientific American, July 1984) からのものです．（Scientific American 社により1985年版権取得．）

図 4.9, 5.6 は Hilbert と Cohn-Vossen の Anschauliche Geometrie (English translation by Chelsea, New York, 1952) からのものです．図 13.8 は，Rudy Rucker の Geometry, Relativity and the Fourth Dimension (Dover, New York, 1977) からのものです．Bill Thurston には親切に図 18.4 を準備して戴いた．Richard Bassein は図 5.7, 5.8, 6.9, 6.10, 7.13, 8.2, 11.1, 11.4, 13.7, 15.1, 17.6, 18.1, 18.2 を，John Heath は図 2.4 から 2.8 までと図 4.8 を，Nadia Marano は図 6.3 を，M. C. Escher は図 18.1 を描いていますが，残りはすべて私の図です．

目　次

第 I 部　曲面と 3 次元多様体

1

FLATLAND

1884年に Square という風変りな人物が首尾よく回顧録を出版しました．実際には Abbott という仲介者が Square 氏に代って出版したのです．当の Square 氏はその頃異説を唱えた咎で刑務所に入っていました．Square 氏は，このように変った名前であるというよりは，説明的かつ正確な名前であるということで一風変っていました．皆さんもお気づきの通り Square とは正方形のことなのです．

さて，その Square 氏はどこに住んでいたのでしょう．とはいえ，我々のような 3 次元の宇宙に住む 2 次元の正方形であるとは思っていないでしょうね．少し厚みのある正方形，例えば 1 枚の紙の大きさをもつ生き物は考えられるかもしれませんが，Square 氏のような全く平たい個体は考えられないでしょう．とにかく Square 氏は我々のような 3 次元の宇宙には住んでいなかったのです．彼は巨大な平面に似た 2 次元の宇宙 Flatland に住んでいました．

また，*Flatland* とは，たまたま Square 氏の回顧録の題名でもあります．これは今ではペーパーバックで入手できますから，是非一読をお勧めします．C. H. Hinton が1907年に同じような本 An Episode of Flatland を出版しています．この 2 冊の本の大きな違いは，Flatland 本来の住民は 2 次元の宇宙を自由に動き廻れるが，Hinton の世界の住民は引力のせいで，円盤状の惑星

Astria の円周上の縁に住むことに限られていることです(図1・1). Astria 伝説の詳細については A. K. Dewdney：The Planiverse をお読み下さい.

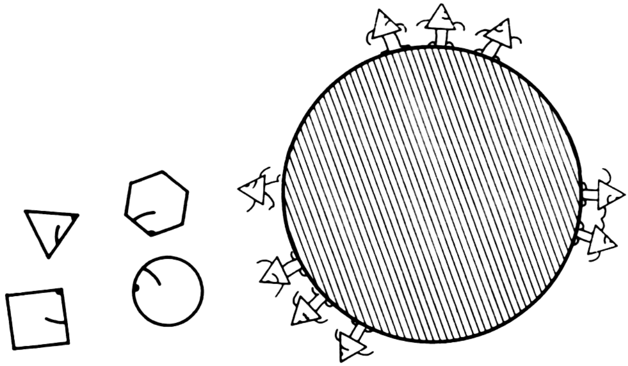


図1・1：Flatland 人は「平面」を自由に動くが, 異星人は円盤上の惑星 Astria の端に限られている.

さて, 本題に戻りますと, Flatland は巨大な平面だとすべての Flatland 人は思っていました. それは我々 3 次元空間に住むものならユークリッド平面と呼ぶものでしょう. 正確に言いますと, 誰もその問題は考えたこともありませんでしたから, Flatland は平面だと想定したのでしょう. 実際, ほとんど誰も考えたことはなかったのです. かつて Stone という名の物理学者がもう一つの理論, すなわち, 有限の領域をもつが境界のない Flatland というものを提起しました. 彼は Flatland を円にたとえたのです. 大部分 Stone 氏は人には理解されませんでした. 円には有限の円周があり, 縁の点がないことは明らかでしたが, 明らかに無限の領域をもつ Flatland とそれがどういう関係があったのでしょうか？少なくとも問題の一つは言語上のものでした. すなわち, 「平面」にあてはまる唯一の言葉は「Flatland」という言葉そのものでした. ですから, Flatland は平面ではないという考えを表すのに無理やりに「Flatland は Flatland ではない」と言わざるをえなかったのです. 言うまでもなく, この理論に惹かれた信奉者はほとんどいませんでした.

しかし, Square 氏はその少数の一人でした. 彼はある方向に出発し, 一度

も方向転換せずに反対方向から戻れるという考えに特に惹かれました．とても興味をそそられたので試してみたくなりました．Flatland 人は大抵は臆病者で，Flatsburgh 市郊外の農場を越えて 1 日あるいは 2 日以上の旅をした者はほとんどいませんでした．もし森を通って東へ気持ちよくてくてくと歩いて 1 カ月も過せば，西から帰って来られるかもしれないと Square 氏は推論しました．

うれしいことに友人二人が同行すると言ってくれたのです．友人 Pentagon 氏と Hexagon 氏は Square 氏の理論を少しも信じてはいなかったのです——ただ彼に苦労をかけさせたくなかっただけなのです．そのために，友人達は Square 氏に Flatsburgh 市にあるだけの赤い糸を買い占めるようにと強く勧めました．というのは，背後に赤い糸をずっと伸ばしてゆけば，1 カ月旅をして断念したときでも，Flatsburgh への帰り道がわかるからです．

後でわかったことですが，糸は必要なかったのです．Square 氏は喜び，Pentagon 氏と Hexagon 氏も一安心したのですが，3 週間旅をして彼等は西から戻って来たのです．と言って，このことで誰かが何かを納得したというのではありません．Pentagon 氏や Hexagon 氏でさえ自分達がどちらかに少し方向を変えて Flatland という平面を曲がりながら大きな円を描いて行ったに違いないと考えたのです(図1・2)．

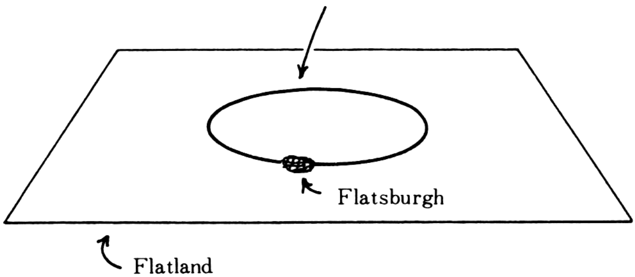


図1・2：Square 氏の仲間でも円上で方向が変わったと思っていた．

Square 氏はこの理論に何の答えもしませんでしたが，このことで彼の熱意

が冷めることはまずありませんでした．もう一度やってみようと準備していたのです！

この頃までには，Flatland では赤い糸は品不足になっていましたから，今度は自分が通った跡を印すために Square 氏は青い糸を伸ばすことにしました．氏は北へ進み，予想通り，２週間後には南から戻りました．今度も，彼はただ円上で向きを変えただけで，そもそも戻れたことは幸運であったと誰もが思っていました．

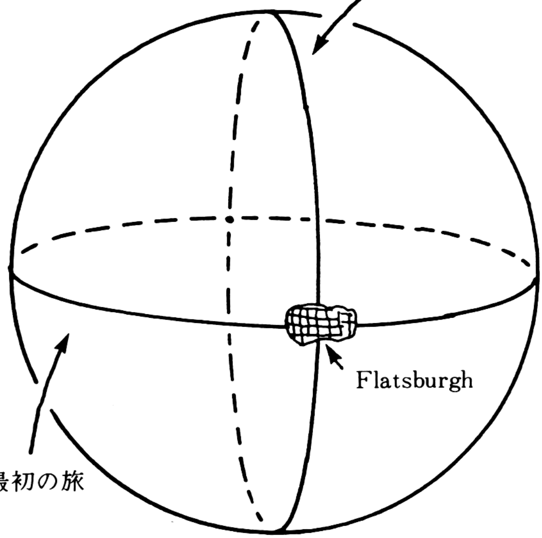


図1･3：Flatland がたとえ超円（ハイパーサークル）（すなわち，球面）であっても，２本の糸は交差するはずである．

今回は旅程が思ったよりずっと短かったので Square 氏は不可解でしたが，それよりもっとわからないことがありました．すなわち，最初の旅で用いた赤い糸に出会わなかったのです．このことには Flatland の物理学者達も同じく興味をそそられました．たとえ Flatland が Stone 氏の示唆した通り，いわゆる超円（ハイパーサークル）であるとしても，２本の糸は交差すると物理学者は確信していたのです（図1･3）．何らかの理由で赤い糸が切れてしまったという可能性は勿論ありました．この可能性を調べるために，科学者は２つの遠征隊を編成

しました．つまり，一隊は赤い糸を辿り，もう一隊は青い糸を辿ったのです．どちらの糸も切れていませんでした．

この相交わらない糸の謎はかなりの歳月わからないままでした．もっと勇敢なFlatland人の中には巡礼のように定期的に糸のあとを辿った者もいました．Flatlandとは「Flatland」(すなわち平面)とか超円ではなく，「トーラス」と呼ぶようなものだと考えるべきであると1人の物理学者が提唱した時にやっと初めて解決の糸口がつかめました．最初は誰もその物理学者が何を言っているのかわかりませんでしたが，この理論によって，相交わらない糸の謎が解けると人々も次第に納得するようになり，これで満足していました．そこで長年の間，Flatlandはトーラスであると考えられていたのです(図1・4)．

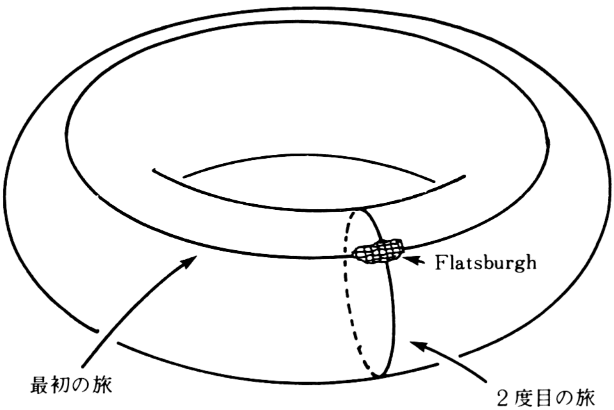


図1・4： 3次元空間に住む人は，トーラスをドーナツの表面と観ることもある．

ところが，ある日ある人がFlatlandの「形」についてまた別の理論を考え出したのです．トーラス理論と全く同じように，この理論でも相交わらない糸の謎が説明できたのですが，これはFlatlandに関して全く違った観点を与えたのです．

この新理論こそが事の始まりでした．それからの数カ月，人々はFlatlandの形に関して新しい可能性を絶えず考え出していたのです（図1・5)．間もなくFlatlandの全貌を調査し，それによって今度こそはその本当の形状を決定

するため大規模な調査に取りかかったのです….

（物語は第 4 章へと続く）

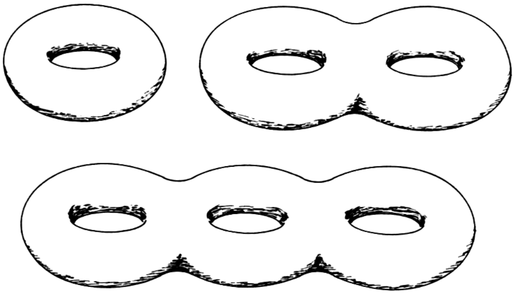


図1・5：いくつかの Flatland の可能な形

3 次元空間に住む我々は図1・5のような図を描ける 3 つの次元をもっています．したがって，2 次元の宇宙がどのように自らに閉じているか容易に理解できます．そのような宇宙に住む Flatland 人はもっと大変な時があるかもしれません．Flatland 人と同じ思いを味わうために，それぞれ次のような状況下にある自分を想像してみて下さい．[1]

1. 知的生命体を求めて遥かな銀河へ遠征している．その銀河に到着し，その中で最も快適そうに見える惑星をめざしたところ，結局は地球に戻っている．
2. 天文学者である．天空の 2 つの違った位置に全く同じものを観察しているように思える．
3. 宇宙からの信号を探す電波天文学者である．遠い銀河よりやって来るかすかな信号を認めた．それを受信してみると，古いテレビ番組「パパはなんでも知っている」の放映であることがわかる．

上述したどの状況からも，空間はあなたが思っていたのとは違う構造なの

注 1　このような状況は想像力を刺戟するためのものである．技術的な問題は気にかける必要はない！

ではないかと疑わしくなるでしょう．すなわち，空間は想像していた明らかなものとは違った形をもつように見えるのです．それだからと言って，この本当の形がどんなものかあなたにわかっているというのではありません！

実のところ，真の宇宙がどんな形のものか誰にもわからないのです．しかし可能な形がどういうものであるかということについてはかなりわかっています．この可能な形というのが本書のトピックなのです．そのような可能な形が**3次元多様体**，すなわち，略して**3-多様体**と呼ばれるものです．(同様に，Flatlandの2次元の形は**2次元多様体**，あるいはもっと普通には**曲面**と呼ばれます．)まだ，ここでは3-多様体という概念は恐らくかなりばく然としたものでしょう．心配しないで下さい．第2章で例をいくつか見ることになります．今のところはまず，Flatlandを表す種々な曲面が自らに閉じているように，我々の宇宙も自らに閉じていると考えられることを知っておくのが大切なのです．

本書では，一連の3-多様体の例を中心にします．これら多様体の詳細な理論を展開するというよりは，その多様体の一つ一つが視覚的かつ直観的にわかるようになるでしょう．これは明らかに簡単なことではありません．Square氏がトーラスの真の性質をHexagon氏に伝える際に経験するであろう難しさを想像してみて下さい．Square氏は2次元に閉じ込められているので，トーラスの明確な図を描くことはできません．同様に，我々に任意の3-多様体の正確な図は描けません．

しかし，希望はあります．種々な3-多様体をトリックを用いて定義できます．また，ある期間研究すると，着実に3-多様体に関する直観が働くようになるのがわかります．こういうことに，人間の精神は非常に柔軟にできているのです．*ただ必ずゆっくりと読んで，時間をかけてよく味わって下さい．*一度にせいぜい1章，あるいはただ1つの練習問題からでも十分でしょう．

本書では3-多様体を直観的に理解できるようにするために，一連の答えではなく，一連の問題を用意しているのです．訓練のための想像力を準備して下さい！

2

貼り付け

テレビの画面で2機の複葉機が空中戦をするビデオゲームは人気があります．このゲームのおもしろい特徴は，複葉機が画面の一方から飛び去ると墜落しないで画面の反対側から戻って来るというところにあります．数学的に言えば，画面の両端が「貼り付け」られているのです．(この貼り付けは全く抽象的なもので，*物理的に*両端を接着する必要はありません．) このように相対する辺を抽象的に貼り付けた正方形あるいは長方形を**トーラス**，あるいはもっと正確には，**平坦な2次元トーラス**といいます．この平坦な2次元トーラスと第1章のドーナツ曲面のトーラスには関連性がありますが，今のところ，*このドーナツ曲面のことは全く念頭に置かないで下さい*．

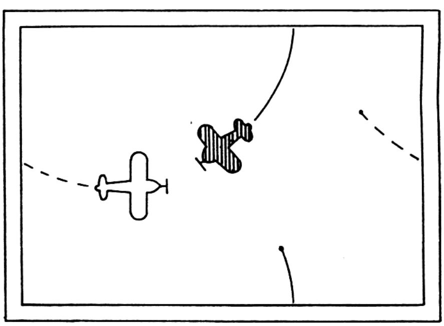


図2.1：複葉機はテレビの画面の縁を横切って飛べる．

演習問題 2.1. その気のある友人とトーラス三目並べのゲームを 数回やってみよ．規則は普通の三目並べと同じであるが，複葉機ゲームでテレビ画面の相対する辺が貼り付けられているように，この場合も盤の相対する辺が貼り付けられ，トーラスになっている．したがって，例えば図 2.2の 3 個の×は 1 列に 3 個並び，勝っている．□

演習問題 2.2. 図 2.3ではトーラス三目並べが進行中で，×の番である．どこへ打つと一番いいか？　代りに○の番だとすれば，最善手はどこか？（演習問題の解答は本書の末尾にある．）□

図 2.4に示されている配置は，トーラス三目並べではすべて同値なものです．第 2 番目の配置は第 1 番目のものからすべてを 1 目「上」に移動して得られます（最上列が「上」に移動すると，当然，最底部に再び現われる）．同様に，第 2 番目の配置のあらゆるものを 1 目右に移動すれば第 3 の配置になります．第 4 の配置は少し異なる方法で得られます．つまり，第 3 の配置を時計廻りに1/4回転させて得られます．

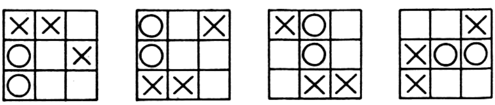


図 2.4：これら 4 つの配置はトーラス三目並べでは同値である．

演習問題 2.3. 図 2.5の配置のどれがトーラス三目並べで同値になるのか？　□

演習問題 2.4. トーラス三目並べの先手には本質的にどれ位違った最初の手があるか？また後手にはどれ位違った 2 手目があるか？最善手を仮定すると，どちらも勝つことが保証されているか？（普通の三目並べでは，どちらも引分けが保証されている．）□

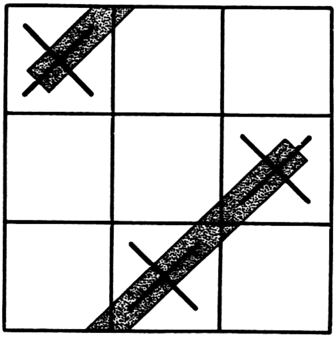


図 2.2：この盤がトーラスを表わすと仮定すると，×は 1 列に 3 個並ぶ．

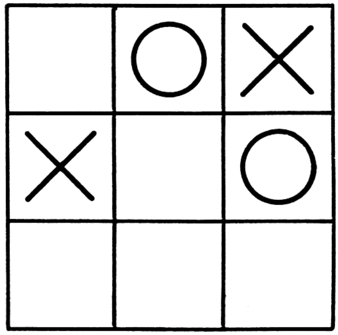


図 2.3：×の最善手は？ ○の最善手は？

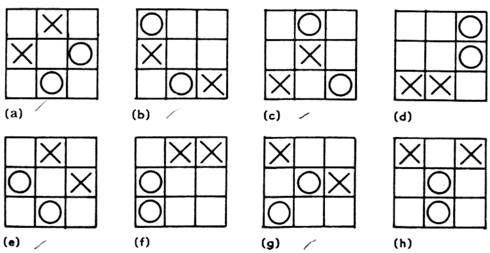


図 2.5：これらの配置のうちどれがトーラス三目並べで同値になるか？

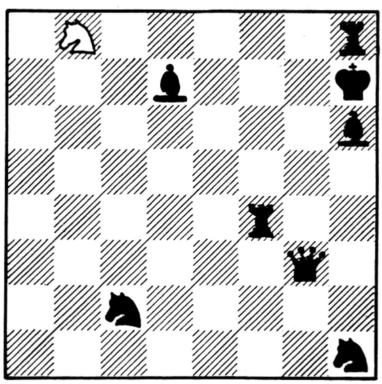


図 2.6：両端を貼り付けるとチェス盤もトーラスになる．

演習問題 2.5. トーラス上のチェスは三目並べよりもっと興味深い。図 2.6の配置を考えよ。白のナイトはどの黒の駒に利いているか？どの黒の駒が白のナイトに利いているか？ □

演習問題 2.6. 図 2.7はトーラスチェス盤のいくつかの駒を表わしている。白のナイトと白のクイーンの両方が利いているのはどの黒の駒か？ □

演習問題 2.7. 友人とトーラスチェスを数回やってみよ。トーラスチェスでは通常の配置から始めるのはよくない。（やってみればその理由がわかる。）代りに，図 2.8の配置から始めるか，または自己流の配置を考えよ。ポーン以外のすべての駒は普通に動くとする。ポーンは 1 枡前後，左右に動き，対角線上に 1 枡動くと取れるとする。 □

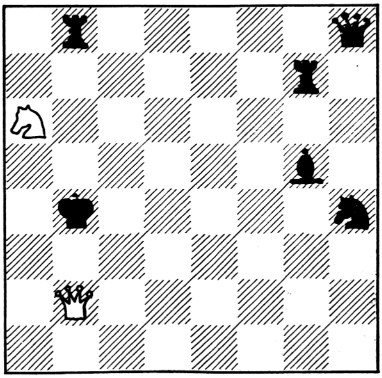


図 2.7：白のナイトと白のクイーンの両者が利いているのはどの黒の駒か？

演習問題 2.8. ビショップがトーラスチェス盤の上右隅を出るとどこへ戻るか？ □

演習問題 2.9. トーラスチェスで，ナイトとビショップが同時に互いに利き合うことはあるか？ □

三目並べとチェスに用いてきた平坦なトーラスは図 1.5の 2 次元多様体と同じような 2 次元多様体です．図 1.5の 2 -多様体と同様に，平坦なトーラスも有限の面積をもち，縁がありません．それら 2 -多様体とは違って，平坦なトーラスは 3 次元空間に描かれずに——貼り付けによって——抽象的に定義されています．また同じトリックによって 3 次元多様体を定義するのにも 4 次元空間の絵に訴えずにできます．

我々の最初の 3 次元多様体はこの平坦な 2 次元トーラスに似ています．これは**3 次元トーラス**，略して**3 -トーラス**と呼ばれています．これを構成するために，まず中身の詰まった空間——あなたのいる部屋は長方形ですから，それで十分でしょう——から始めましょう．物理的に貼り付けるというのでなく，左側の壁を通って歩いてゆくと右側の壁から出てくるという意味で，右側の壁に貼り付けられた左側の壁を想像してみましょう．同様に後の壁に貼り付けられた前の壁，また天井に貼り付けられた床を想像しましょう．これであなたはもう 3 次元トーラスの中に座っていることになるのです！　この 3 -トーラスには縁はありませんが，全容積は丁度最初の部屋の容積になっています．

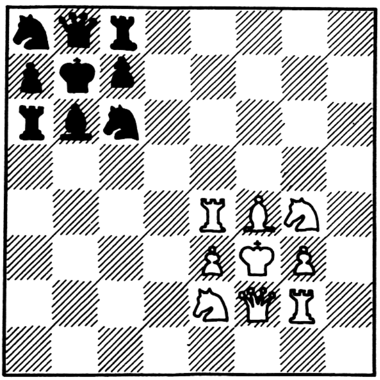


図 2.8：これはトーラスチェスの 1 つの可能な最初の配置である．

演習問題 2.10. 上に述べた 3 - トーラスの「壁」から見たとき，何が見えるか？　また，この「床」あるいは「天井」から見ると何が見えるか？　□

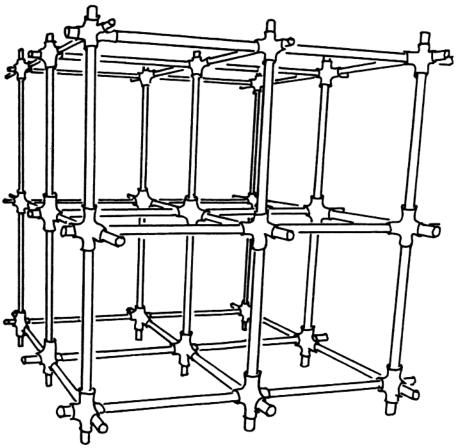


図 2.9：ジャングルジムの一部

1 辺が10メートルの立方体でできた 3 - トーラスを想像して下さい．この立方体は正方形の格子のパイプでできているジャングルジムを含んでいるとし（図 2.9），パイプの各分節は 1 メートルの長さとします．3 - トーラスを構成するために立方体の面を貼り付けると，ジャングルジムは各面を横切って一様に続いていきます．

このジャングルジムで一人で遊ぶのはかなり退屈でしょう．確かに，数メートルあるいはそれ以上登れますが，やはり，あなたのいる位置は元のままです．けれども視覚的にはおもしろいことになっています．あなたは10メートルあるいはそれ以上を見上げて，自分自身を見ることができます．けれども，あなたが「もう一人の自分自身」の方へ登り始めるとすぐに，それはまた更に10メートル離れたその自分自身に会いに行くために（空しくも）あなたから離れて登り始めるでしょうから，あなたは自分自身に会いに行けないのです！

概して言うと，友人がいれば，このジャングルジムも，もっとずっと楽しいものになります．例えば，あなたが友人に会うために10メートル登っている間，友人はあなたを待っていてくれるでしょう．勿論，あなたが上に登っている間に，彼の方は10メートル這い上り，あなたが待合わせ場所に着くときには，友人はそこでただ待っているどころか，反対側からやって来ることでしょう．3-トーラスでは鬼ごっこがとりわけおもしろいのです．

演習問題 2.11． 3-トーラスでは想像力がめちゃくちゃになる．例えば，本当の3次元複葉機で飛び廻ることが想像できる．また，すべての南北の道路が北行きだけになり，すべての東西の道路が東行きだけになり，すべてのエレベーターが上にだけ行く（それでも行きたいところにはどこへでも行ける）ような完全に都市化した3-トーラスが想像できる．3-トーラスで他にどんなことができるか想像してみよ．　□

演習問題 2.12． 3-トーラスで一人でどのようにキャッチボールができるか？　□

もし宇宙が3-トーラスであれば，理論的には我々には空間をのぞき込んで自分自身を見ることができるはずです．天文学者がそうしなかったという事実は，本当の宇宙が3次元トーラスではありえないということでしょうか？いいえ，そうではありません！宇宙はわずか100億年あるいは200億年の年齢なのです．ですから，もし宇宙がとても大きな3次元トーラス——例えば，現在の膨張の段階で直径600億光年——とすれば，どんな光も横切って完全に渡り切るだけの時間がまだなかったはずです．もう一つの可能性は，我々は実際に宇宙を横切って，ずっと見ているのですが，ただわかっていないだけなのです．我々が遠い空間を眺めやるとき，何十億年も前のものを見ているのです．何十億年も前には，我々の銀河系は現在のものとは違って見えました．（今日の望遠鏡に入ってくる光は何十億年も前にその源を発し，銀河の空

間を旅してその間の時間を費やすためにこういう結果になるのです.)いずれにしても，我々は銀河系の中にいるので，現在の銀河がどんな形をしているか正確にはわからないのです!

ちょっとした視覚的な表示をして，この章を終えることにします(図2.10).

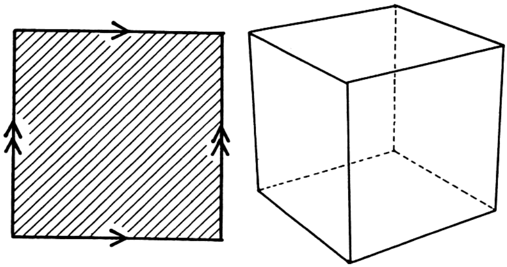


図2.10：平坦な2次元トーラス(左)と3次元トーラス(右)

以下，平坦な2次元トーラスは矢印を付けた正方形として描くことにします．すなわち，対応する矢印が合うように正方形の縁を貼り付けると想像して下さい.立方体の面を印すのにも同じような図を考えることができますが，これはあまり実用的ではありません．したがって，ただ立方体を描き，相対する面が貼り付けられていると言って3-トーラスを表わすことにします.ついでに述べますと，2次元トーラスのような2-多様体は，何かの表面ではなくても，曲面と呼ばれます.

3

語彙

本章では多様体の研究に基本的な次の5つの概念の説明をします．

1．位相　対　幾何

2．内在的性質　対　外来的性質

3．局所性　対　大域性

4．等質幾何　対　非等質幾何

5．閉多様体　対　開多様体

*今すぐにこれらの概念を修得しようと気に病まないで下さい！*ここで一般的なアイディアを身につけると，必要になれば，後でいつでもこの章を参照できます．しかも，この章で導入されたアイディアを後の章で更に補強します．

本章の大部分の例は曲面ですが，その概念は3-多様体にも同様に適用できます．

位相　対　幾何

薄く，伸びやすいゴムでできた曲面を想像して下さい．この曲面を曲げたり，伸ばしたり，捩ったり，また（破ってはいけませんが）好きなように形を変えて下さい．変形すると，この曲面はいろいろと変りますが，その性質

のうち変らない状況もあります．例えば，図3.1の左端の曲面は，変形してもなお，球面[2]の一種として認められますが，右端の曲面は２つの穴をもつドーナツ型の変形と考えられます．変形によって影響を受けない曲面の性質の状況をその曲面の**位相**と言います．このように，図3.1の右の２つの曲面と同様に，左の２つの曲面は同じ位相をもちます．しかし，球面と２穴ドーナツ曲面は違った位相をもちます．つまり，どんなにしても，一方の曲面を他の曲面のように変形することはできません（一方の曲面を引き裂いて他方の曲面に似るように強引に貼り付けることは許されていないことを思い出して下さい）．

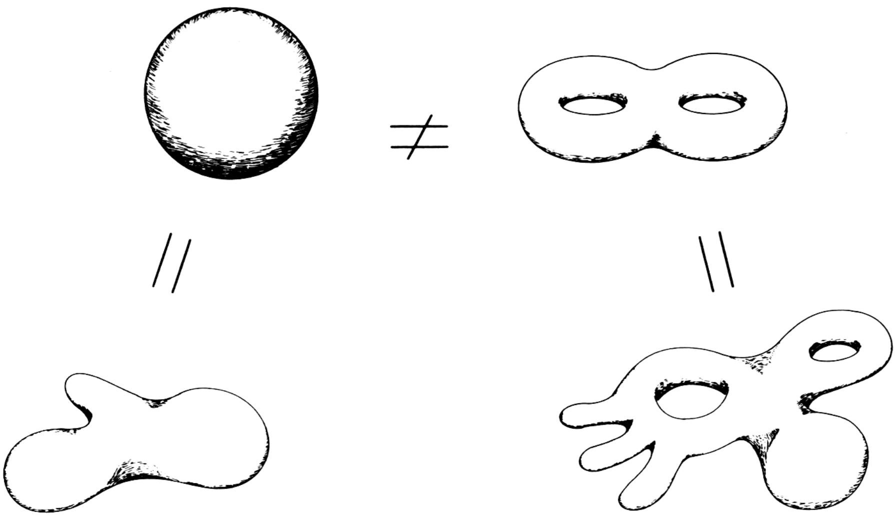


図3.1：右の２つの曲面と同じように，左の２つの曲面は位相的には区別できない．

曲面の**幾何**は曲面が変形されたとき*変化*するような性質から成り立っています．曲率は最も大切な幾何的性質です．面積，距離，角度も幾何的な性質です．

注２　球面とはソリッド（中身の詰まった）球体とは違って，曲面を常に意味する．球面は本質的に２次元であるが，中身の詰まった球体は本質的に３次元である．

卵の殻とピンポン玉も同じ位相をもっていますが，異なる幾何をもっています．(次の2つの例で，卵の殻とかピンポン玉のような物は，実際の物がもつ厚さは無視すれば，本当は2次元であることを認識して下さい．)

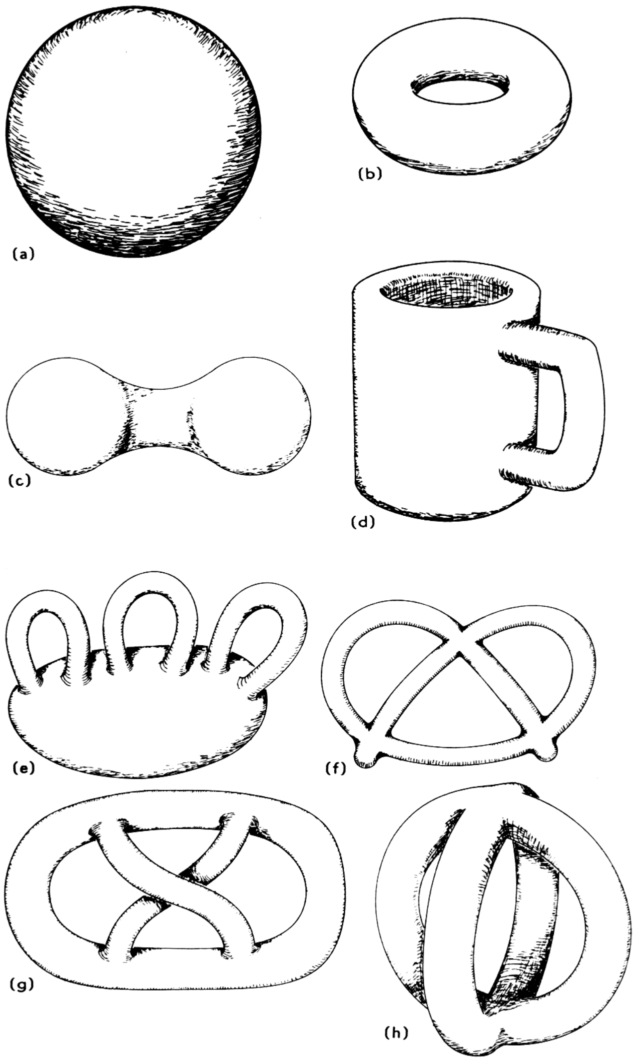


図3.2：どの曲面が同じ位相をもつか？

演習問題3.1　図3.2の曲面のどれが同じ位相をもつか？　□

演習問題3.2　第1章の物語では，Flatland で1点(すなわち，Flatsburgh の下町）のみで交わる2本の糸の輪をずっと伸ばせることを Square 氏は発見した．彼は Flatland の位相的あるいは幾何的性質を発見したのか？　□

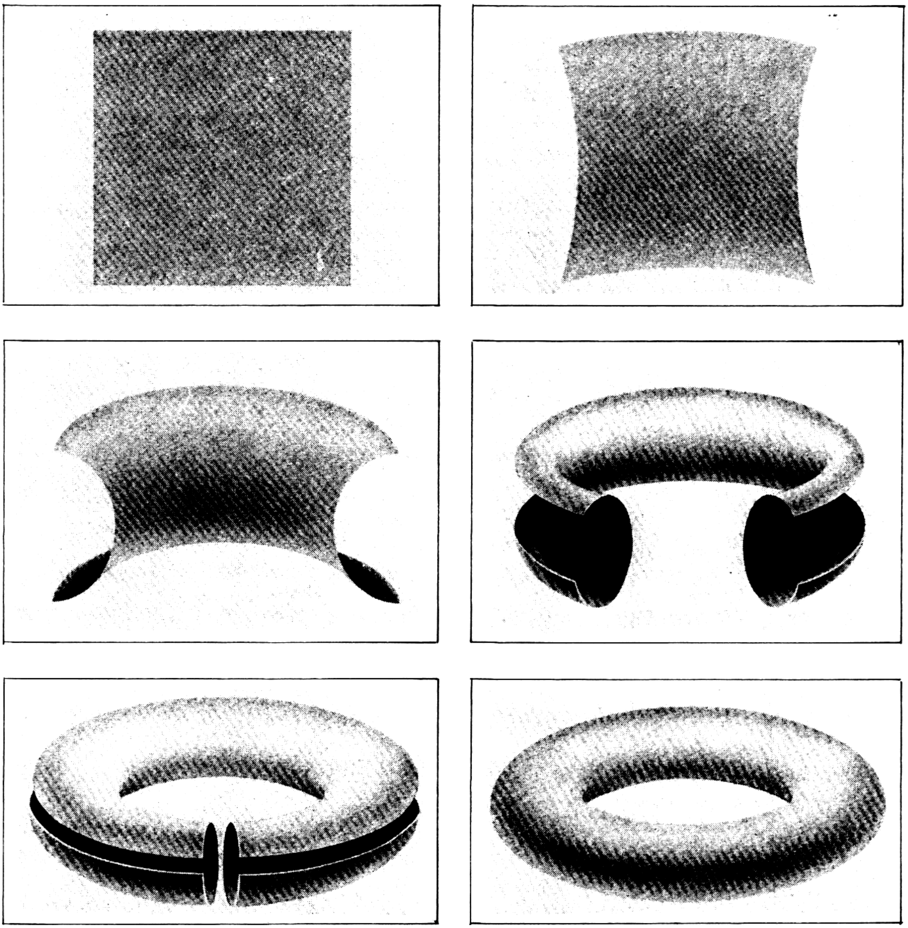


図 3.3：平坦なトーラスとドーナツ曲面とは同じ位相をもつ．

もし*物理的*に正方形の上辺を下辺に貼り付け，左辺を右辺に貼り付けると，ドーナツ曲面が得られます（図3.3）．平坦なトーラスとドーナツ曲面トーラスは同じ位相をもちますが，同じ幾何はもちません．平坦なトーラスは明らかに平坦ですが，ドーナツ曲面は曲がっています．図3.3では，平坦なトーラスをドーナツ曲面に見えるように変えねばなりません．

平坦なトーラスとドーナツ曲面が同じ位相をもつという事実から，どちらもトーラスと呼ばれることの説明がつきます．平坦なトーラスとドーナツ曲面を区別するのは幾何に興味があるときだけなのです．幾何学では，平坦なトーラスがドーナツ曲面よりずっと重要ですから，特に断らなければ，本書では

「トーラス」は「平坦なトーラス」を意味する

ことにします．

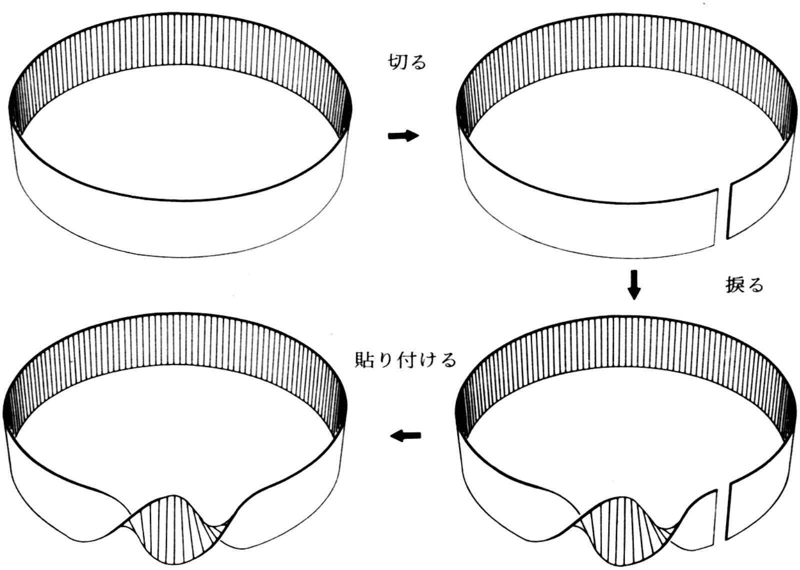


図 3.4：ゴムの帯の捩り方

内在的性質　対　外来的性質

図3.4はゴムの帯の捩り方を示しています．捩れた帯は元の捩れていない帯と位相的には異なります．

少くとも我々の観点からすれば，これらの帯は位相的には異なるものです．それと対照して，帯そのものに住む Flatland 人が，切る・捩る・貼り付けるという作業をどのように見るか想像して下さい．帯が Flatland 人の全世界なのです．つまり，仮りにも3次元空間の存在することなど彼等の念頭にはありません．ですから，彼等は捩りに気付く余地がないのです．帯が切られ——しばらくして——正確に元の状態に戻るのを見るのです！

外来的位相——3次元空間に埋め込まれている状態——は変わりましたが，帯の**内在的位相**は変わりませんでした．

一般に2つの曲面は，この曲面に住んでいる Flatland 人に（位相的に）両者の違いが区別できなければ，同じ内在的位相をもつのです．また，2つの曲面は，*3次元空間の中で*一方を他方のように見えるように変形できれば同じ外来的位相をもつのです．

演習問題3.3　図3.5のすべての曲面は同じ内在的位相をもつ．また，同じ外来的位相をもつものはどれか？　□

演習問題3.4　帯の内在的かつ外来的位相の両方が変るように，図3.4の切る・捩る・貼り付ける操作を修正せよ．□

内在的／外来的な相異は曲面の幾何にも当てはまります．一例として，1枚の紙をとり，それを図3.6のように折り曲げて半円柱を作りましょう．この紙の外来的幾何は明らかに変りました．しかし，その紙自体は変形していません．すなわち，その**内在的幾何**は変りません．言い換えると，1枚の紙に住んでいる Flatland 人は，紙が曲げられたのかどうかわからなかったのです．

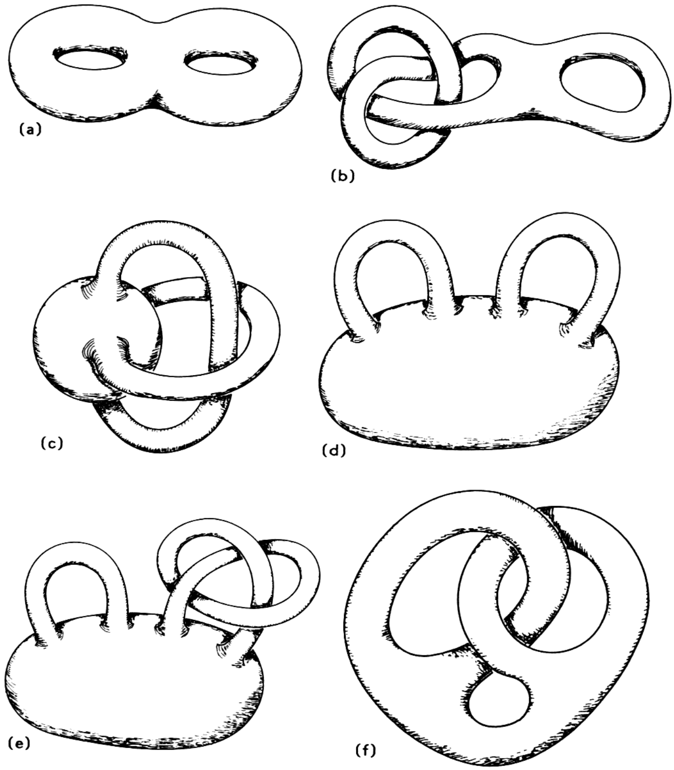


図 3.5：どの曲面が同じ外来的位相をもつか？

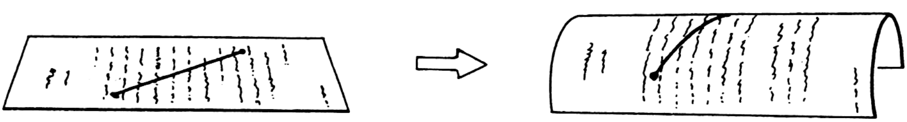


図 3.6：1 枚の紙を折り曲げると——内在的ではなく——外来的幾何が変る.

ここに上で述べたアイディアを図解する１つの実験があります．１枚の（平らな）紙の上に２点を印し，その２点を結んで直線を引きます．この直線は平らな紙の上の２点間の最短距離を表わします．さて，この紙をまるめて円柱にします（必要ならばテープか糊で貼り付けます）．次に糸を用意し，１点からもう１点へ円柱の回りにその糸を巻き付けます．その糸はあなたの描いた線の真上に伸び，円柱上の最短の道が平らな紙の上の最短の道と同じであることがわかります．これは驚くことでもありません．なぜならば，「平らな」紙と「曲がった」円柱は両方とも同じ内在的幾何をもつからです．

演習問題3.5　１枚の紙を変形せずに巻いて円柱にすることができる．紙を変形せずに巻いて円錐形も作ることができるか？紙を変形せずにバスケットボールを包めるか？このことは紙，円柱，円錐，バスケットボールの内在的幾何について何を語っているか？　□

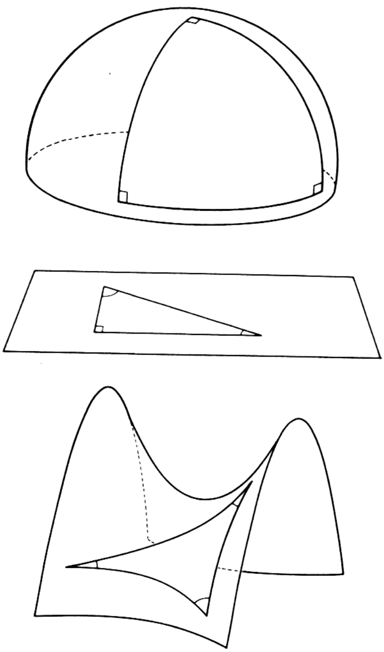


図 3.7：半球面，平面，鞍の面は，すべて異なる内在的幾何をもつ．

図3.7は異なった内在的幾何をもつ3つの曲面を示しています．Flatland人はその上に描かれた三角形の性質を研究して，これらの曲面を比較することができました．〔三角形の辺は，右にも左にも曲がっていないという意味で，内在的に直線であることが要求されます．糸をぴんと張るとか，光線がどのように走るかを見たりすることによって，我々3次元空間に住むものが我々の宇宙で直線を見つけるように，Flatland人も面の上に（内在的な）直線を見つけます．内在的直線は**測地線**と呼ばれます．〕半球面上では，いかなる三角形も角の総和は180°より大きいのです．例えば，この図で示されている三角形は，すべての角が90°に等しく，したがって，角の総和は90°＋90°＋90°＝270°となります．ところが，平面では，あらゆる三角形は角の総和が丁度180°です．鞍状の曲面では，すべての三角形の角の総和は180°未満です．したがって，Flatland人は，どのような曲面に自分達は住んでいるのか実験的に定めることができるでしょう．つまり，三角形を描いて，その角を測定すればいいのです！三角形のこれらの性質は第9，10章で詳しく扱います．

数学者Gaussは，まさに我々の3次元宇宙でこの実験を行ないました．（3次元多様体がどのように曲げられるかは後の章で説明します．もっとも，Gaussは他のよくわかっていないことにも興味があり，多分，空間の曲率を発見できるとは予想していなかったのでしょう．）Gaussは3つの山ホーヘンハーゲン，ブロッケン，インゼルスベルグの頂上により形成された三角形の角を測定しました．彼の測定機器の正確さの範囲内で，空間は内在的に平坦，すなわち，角の総和は180°であることを発見したのです．しかし，宇宙は広大で地球はあまりに小さいものですから，地球的規模で，宇宙の任意の曲率を見つけるのは不可能なのでしょう．第19章で宇宙の曲率を詳しく扱います．

我々3次元空間に住むものは曲面の内在的性質と外来的性質の両方に思いを及ぼせます．Flatland人にはこの選択の自由がありません．その2次元宇宙が彼にとって真実で認めうるすべてですから，当然のことながら，彼は内在的観点をとります．例えば，トーラス上で育ったFlatland人はトーラスがどういうものか十分に直観的に理解しているでしょう．勿論，トーラス横断

旅行は日常的なものと言えるほど短い旅だと仮定した上でのことです．もしFlatland 人が Flatsburgh 市を通って伯母を訪ね，また帰宅する場合，引き返すよりは同じ方向に進み続ける方が早いということが直観的にわかるでしょう．

演習問題3.6　ある銀河に友人を訪ね，別の銀河で少し探険したあと，母銀河に帰るには，引き返すよりはそのまま進むのが最も早いような 3-トーラス宇宙に住んでいると想像してみよ．□

我々人間は自分の宇宙を内在的に認識していますから，3-トーラスのような 3-多様体を研究する際に，当然のこととして内在的にもそれらを視覚化します．曲面は 3-多様体の研究に役立ちますから，内在的に曲面について考えることも役に立つことでしょう．この目的のために，明確に他の言い方をしないかぎり，すべての*曲面は内在的に研究*するという申し合わせをしておきましょう．曲面がもちうるいかなる外来的性質も無視することにします．（例えば，図3.4のゴム帯の捩れは無視するし，図3.6の紙のゆがみも無視します．）

ここで，哲学的なコメントを少し述べておきたいと思います．たとえ宇宙が（例えば，それが 3-トーラスのように）奇妙にそれ自身につながっていても，これは宇宙が何らかの 4 次元空間において曲がっているということは意味しません．内在的観点の真髄は

> 多様体はそれ自体において，かつ，それ自体で存在し，何らかの高次元空間に存在する必要はない

ということです．

局所性　対　大域性

曲面あるいは3-多様体には局所的性質と大域的性質があります．**局所的性質**は多様体の小さな領域内で認められるものですが，一方，**大域的性質**は全体としての多様体を考察する必要があります．次の演習問題で，この定義を試みて下さい．球面と平面は，局所的にも大域的にも，また位相的にも幾何的にも，異なっていることに注意して下さい．

演習問題3.7　Flatland人の社会は球面上にある．しかし，ある日ある人が次の発見の1つをするまで，平面に住んでいると常に思い込んでいた．どの発見が局所的で，どれが大域的か？

1．三角形の角を注意深く測定し，61.2°，31.7°，89.3°であることがわかった．
2．ある探険家は東方に向い，まっ直ぐな道から決してそれることなく西方より戻った．
3．文明が広がるにつれて，Flatland人は，Flatlandの面積が有限であることを発見した．

「局所的」と「大域的」という用語は「局所幾何」，「大域位相」という表現で最もよく用いられます．例えば，平坦なトーラスとドーナツ曲面とは同じ大域位相をもつが，異なった局所幾何をもっています．ところが，平坦なトーラスと平面は同じ局所幾何をもっていますが，異なる大域位相をもっています．3-トーラスは「普通の」3次元空間と同じ局所幾何をもっていますが，その大域位相は異なっています．第1章のFlatland人はFlatlandのために様々な大域位相を発見していましたが，Gaussが山頂を調査したとき，彼は地球という領域で我々の宇宙の局所幾何を調査していたのです．

多様体の定義を再述するために，局所的または大域的という用語を用いることができます．2次元多様体（すなわち，曲面）は平面の局所位相をもつ

空間であり，３次元多様体は「普通の」３次元空間の局所位相をもつ空間です．すべての２-多様体は同じ局所位相をもち，すべての３-多様体も同じ局所位相をもちます．しかし，２-多様体の局所位相は３-多様体の局所位相とは異なります．３-多様体は，局所位相が通常の空間のものと適合するので，宇宙のありうる形にかなうと述べておきましょう．我々には宇宙の大域位相とか局所幾何についてほとんど何の知識もありませんが，宇宙全般にわたって局所位相は太陽系で我々の占める「通常の」空間の局所位相と全く似ていると仮定していいでしょう．

演習問題3.8　１次元多様体の概念を定義し，例を１つ挙げよ．□

演習問題3.9　無限に長い円柱と平面を比較せよ．これらは同じ局所幾何をもつか？（これらの外来的局所幾何を比較することもできるが，通常の通り，ここでは内在的局所幾何を意味することにする．）それらは同じ大域位相をもつか？また，局所位相をもつか？演習問題3.7に挙げた３種類の発見のどれを用いれば，Flatland 人は円柱と平面の区別ができるか？　□

演習問題3.10　立方体の部屋でできた３-トーラスと直方体の部屋でできた３-トーラスとを比較せよ．両者は同じ局所位相をもつか？また同じ局所幾何をもつか？同じ大域位相をもつか？同じ大域幾何をもつか？

等質幾何　対　非等質幾何

等質多様体とは局所幾何がすべての点で同じものです．**非等質**多様体の局所幾何は点によって変るのです．球面は等質な曲面です．でこぼこの小球体の表面は非等質です．ドーナツ曲面はかなり対称的ですが，非等質です．つまり，外側は凸状ですが，穴の近くは鞍の形をしています．しかしながら，平坦なトーラスは，あらゆる点で平坦ですから，等質です．ドーナツ曲面は

等質ではありませんが，平坦なトーラスは等質なので，幾何学では，平坦なトーラスはドーナツ曲面より大切なのです．それと同じ理由で，球面は不規則な小球体の表面より大切なのです．球面と平坦トーラスは，我々がこれまでに見てきた唯一の等質な曲面ですが，他にも沢山あります．本書の主要なテーマは，多様体について，それまでにもっていない等質な幾何を見つけ出すことです．

演習問題3.11　3-トーラスは等質3-多様体か？ □

閉多様体　対　開多様体

直観的には，**閉**は有限で**開**は無限を意味します．次の演習問題で，あなたの直観力を試してみて下さい．本書の最後で答えを検討できます．

演習問題3.12　次の多様体のどれが閉で，どれが開か？

1. 円
2. 直線（線分というのではなく，全体）
3. 2穴ドーナツ曲面
4. 球面
5. 平面
6. 無限に長い円柱
7. 平坦なトーラス
8. 通常の3次元空間
9. 3-トーラス．□

残念ながら，閉と開という単純な概念には複雑なことが2つあります．1つは，円板のような縁をもつものは用語的には多様体でさえない（いわゆる境界のある多様体）ということです．したがって，閉とも開とも考えないのです．このように，「閉」と「開」という用語は多様体に縁がないことを意味します．こういう条件は本書で扱う問題ではありませんが，他の書物で著者

が「平坦なトーラスは閉曲面である」というような命題を述べている場合，その平坦なトーラスは有限であるというのではなく，(トーラスを構成するときの縁をもつ正方形とは違って）縁がないことを強調しているのだということがわかります．

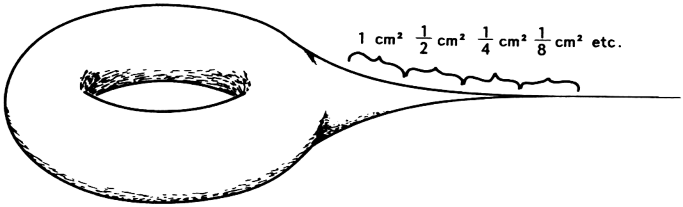


図 3.8：「尖点（カスプ）」のあるドーナツ曲面は，その尖点が無限に長くても有限の面積をもつ．

第2の複雑なことは，もっとおもしろいものです．無限に長いが有限の面積しかもたない曲面があるのがわかります．その典型的な例は，いわゆる「尖点（カスプ）」のあるドーナツ曲面（図3.8）です．その尖点は次第に細くなる無限に長い管です．尖点の最初の1cm は 1cm²の面積をもち，次の 1cm は $\frac{1}{2}$ cm² の面積，次は $\frac{1}{4}$ cm² …となっていきます．このように，尖点の全面積は $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=2$ cm² となります．大切なのは，尖点の面積が正確に 2 cm²ということではなく，それが有限だということです．というのは，この曲面の残りの(有限の)面積を加えると，たとえそれが無限に長くても，全体として曲面は有限の面積をもつことがわかります．慣習によって，曲面は，その面積というより，むしろ，さしわたしの距離に従って，閉と開に分類されます．ですから，尖点のあるドーナツ曲面は，有限の面積であるにもかかわらず，開と呼ばれるのです．次の演習問題以後，本書ではもうこれ以上尖点に出会うことはないでしょう．

演習問題3.13　Square 氏が尖点を下って旅すると，彼に何が起こるか？
□

今後，本書では主として閉多様体を扱います．したがって，明確に他の言い方をしなければ，今後

「多様体」は「閉多様体」を意味する

ことにします．

4

向き付け可能性

この物語の第1章が終ったとき，我々の英雄 Square 氏と仲間の Flatland 人達は Flatland 全体の大調査に乗り出したばかりでした．最初の調査隊が出発したときの興奮はものすごいものでした．しかし，その一隊が戻って来たときの騒ぎに比べると，それも何ということもありません！

帰還してくる調査隊員達に最初に出くわしたのは郊外の農業地帯に住んでいる老農夫でした．彼は道路を曲がろうとしており，反対側から調査隊員達が帰って来ているところでした．幸い，この衝突で誰にも怪我はありませんでした．調査隊員達が道路の歩行者側を歩いていなかった不作法さには少し当惑したものの，皆んなが無事に帰って来たのを見た喜びのあまり，また冒険談を聞きたかったために，農夫の怒りもたちまち消えてしまいました．彼は一行について町に入りました．

彼らが Flatsburgh 市の境界に近づいた時，「市へようこそ」とか，それまでロータリクラブの集会等を報せていた看板が逆さになったものに置き換えられていることに隊員の1人が気づいたのです．いわば「そこうよへ市」となっていました．

「子供はいつもいたずら上手だな」と彼はくすくす笑いました．

「どういうことですか？」とよく聞きとれなかったので農夫が尋ねました．

「いや何んでもない．ただ，あの看板の子供達のいたずらがおかしかった

だけですよ」

その看板がどうしてそんなにおかしいのか，わかりませんでしたが，農夫はそれ以上もう問題にしないことにしました．

調査隊員達はFlatsburghに入るにつれて，一層当惑してきました．すべての看板が逆さまに書かれていたのです．その老農夫だけでなく，すべての人が道路の間違った側を歩いていたのです．不思議なことに，自分達のいない間にFlatsburghのすべてのものが鏡像に置き換えられてしまったかのようでした．一般に，Flatland人には迷信深い傾向がありましたが，調査隊員達にとって，このFlatsburghの鏡の逆転は，よい前兆ではありませんでした．

それだからと言って，こういう状況下でFlatsburghの市民がもう幸せではなくなったというのではありません．調査隊員の留守中，少しでも異常なことは何もFlatsburghで起こらなかったと市民は主張したのです．普通でないとわかったのは，逆さまに文字を書いたり，Flatsburghがともかく変わったなどと妙な考えを抱いている調査隊員達の方でした．実のところ，市民達には調査隊員達が全く身の毛のよだつようなものだとわかったのです．親類の人達や親しい友人を除いては誰も彼らに近付こうとはしませんでした．

心配していた通り，大調査は中止となり，その後3年間，Flatlandの文明化した地区から大声で呼べば聞こえる範囲外には，誰も出かけなくなりました．

（物語は第5章に続く）

演習問題4.1　宇宙を横切って明らかに遠く離れた銀河へ行ったところ，ただ宇宙を完全に廻って，自分自身の銀河系へ戻っていることに気づくような物語を書くこと．地球を見つけたとき，それが図4.1のようになっているのを見れば驚くであろう．着陸するとき，何が見えるか？故郷を歩く様子を書くこと．人々はあなたのことをどう考えるか？　□



図 4.1：地球を逆さまに写した鏡

Flatland の物語では，調査隊員はそれぞれ自己の鏡像として Flatland に戻って来ました．何が起こったか見るために，調査隊員が横切ったものに似た一連の領域を示す図4.2を調べて下さい．この一連の領域がメービウスの帯です．(本当のメービウスの帯は厚さが零です．もし間違って――本当の紙で

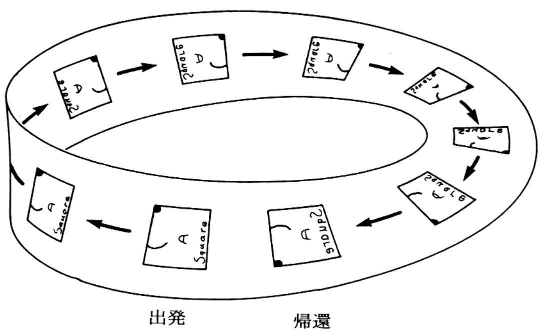


図 4.2：Square 氏がメービウスの帯をまわるとき，鏡像の状態で戻って来る．

できたメービウスの帯のように――少し厚味があると想像すると，出発した

紙の反対側に旅から戻ってくる Square 氏のいろいろな問題を背負い込むことになります．メービウスの帯が本当に 2 次元である——厚みがない——限り，こういう問題は起こりません．）

問題は，Flatland 人がどういう種類の曲面でメービウスの帯を横切れたかということです．**クラインの壺**が 1 例です．正方形から平坦なトーラスを作ったのとほとんど同じ方法で正方形からクラインの壺が作れます．ただし，今回は図4.3に示された矢印が合うように縁を貼り付けるのです．平坦なトーラスの場合と同じく，こういう貼り付けは，事実上 3 次元空間で行なうべき

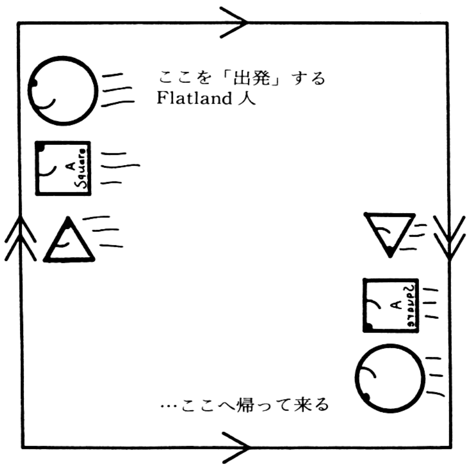


図 4.3：矢印が合うように，この正方形の縁を貼り付けると，クラインの壺が得られる．Flatland 人が左へ行くと，鏡像として右側より戻る．

だと言うつもりはありません．つまり，1 つの辺より出て行った Flatland 人は，反対の辺から戻るということだけを意味しているのです．上と下の辺は平坦なトーラスと全く同じように貼り付けます．つまり，Flatland 人が上端を横切るとき下端より戻る，ただそれだけなのです．しかし左右の辺は「裏返し」で貼り付けます．Flatland 人が左端を横切るとき右端から戻りますが，鏡像になって戻ります．クラインの壺にはたくさんのメービウスの帯が含まれています（図4.4参照）．

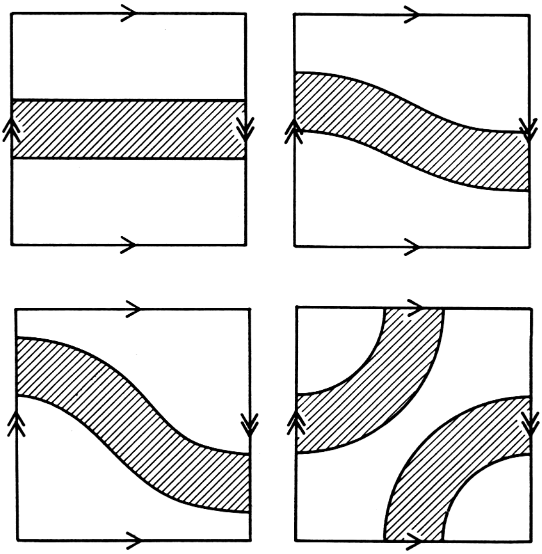


図 4.4：クラインの壺は多くのメービウスの帯を含む．

演習問題4.2　クラインの壺の三目並べで，図4.5のどの配置が１列に３駒並んで勝ちになっているか？　□

演習問題4.3　トーラスよりもむしろクラインの壺を作るために貼り付けた図2.6のチェス盤を想像せよ．そのとき白のナイトは黒の駒に利いているか？また，どの黒の駒が白のナイトに利いているか？　□

クラインの壺の三目並べとチェスの配置を解析するのによい方法があります．例えば，進行中のクラインの壺の三目並べゲームがあるとしましょう．その配置は図4.6の左側に示してあり，×の動く番です．急いで右上の隅をとるよりも，×はちょっと休んで注意深くその状況を解析します．そうすれ

ば，盤の上端は下端に貼り付けられていることに気づくでしょう．したがって，元の盤の上に盤のコピーを描くと，上端と下端がどのように結びつくのかもっとはっきりとわかります．同じ理由で，元の盤の下に別のコピーを描きます．左右にも同じようにしますが，トーラスではなくクラインの壺で三目並べをしているのだという事実を考慮に入れて，これらのコピーの上下を逆さにすることに留意しなければなりません．このような手順を繰り返し，

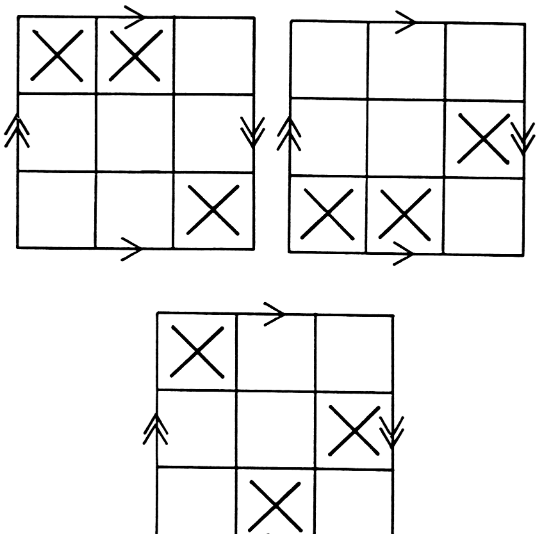


図 4.5：どれがクラインの壺の三目並べの勝利の配置なのか？

新しい盤のコピーを古いものに貼り付けていきます．原理的にはいつまでも続けられますが，どういうことになっているのか明確に知るには，常に 9 枚のコピーで十分であることがわかります．最後の図をよく調べ，×が気持ちよく下の左隅を取れば，直ちに勝てます．

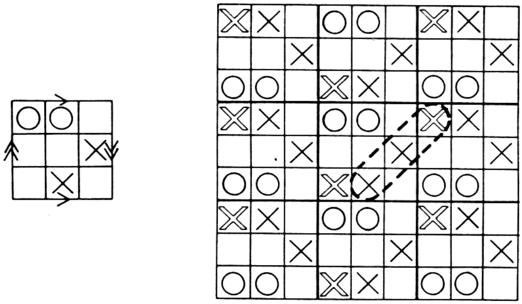


図 4.6：クラインの壺の三目並べの解析.

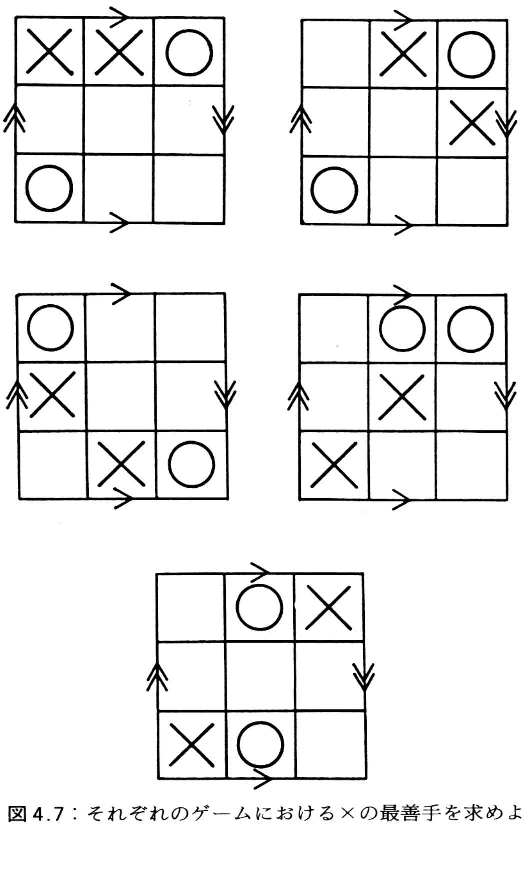


図 4.7：それぞれのゲームにおける×の最善手を求めよ.

演習問題4.4　上の方法を用いて図4.7のそれぞれの状況での×の最善手を求めよ．□

演習問題4.5　友人とクラインの壺の三目並べを数回行なうこと．□

演習問題4.6　友人とクラインの壺のチェスを数回行なうこと．□

演習問題4.7　ビショップがクラインの壺のチェス盤の上右手隅を出るとき，どこに戻るか？　ヒント：盤の隅に紙を貼り，図4.6のような図を描け．□

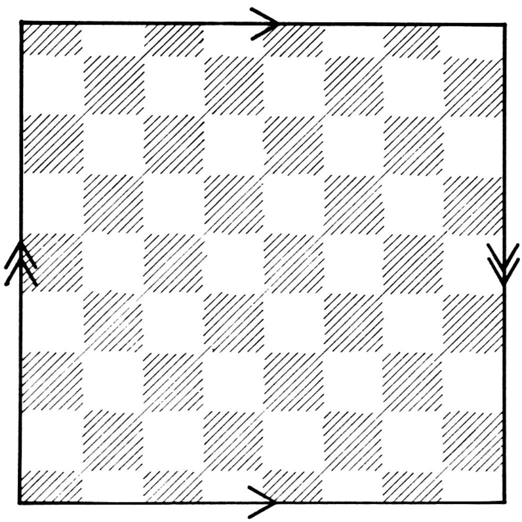


図 4.8：クラインの壺のチェス盤を作る新しい方法．上端の半分幅の列を下端の半分幅の列に貼り付けるとクラインの壺そのものの普通の列になる．

演習問題4.8　演習問題4.3において，クラインの壺のチェス盤では，ナイトとビショップの1つが，同時に互いに相手に利くことがわかった．これはどうして可能なのか？ビショップは同色の枡の上の駒のみに利き，ナイトは反対色の枡の上の駒のみに利くはずではないのか？チェス盤が図4.8のようにできているとすれば，ナイトとビショップは同時に互いに利くのか？　この新しい盤でナイトとルークが同時に互いに利き合うことはあるか？□

大抵の多様体の大域位相は内在的に理解できるに違いありません．しかし，大域位相をもっと直接的に理解するために，3次元空間においてクラインの壺を構成できます．ゴムでできた正方形からクラインの壺を作るとしましょう．正方形を巻いて円柱を作り，上端と下端を貼り付けます．これは簡単です．さて，次に，（図4.9のように）円柱を自分の中に通して両端を貼り付けます．自己交差はおもしろくありませんが，それ以外に3次元空間にクラインの壺を埋め込む方法はありません．（第9章に出てきますが，自己交差なしでクラインの壺を4次元空間に埋め込むことができます．）

注意：図4.9はクラインの壺の大域位相をもう少し現実的にするために挿入しましたが，大抵の目的のためには，クラインの壺は相対する端を適当に貼り付けた正方形として描く方がいいでしょう．

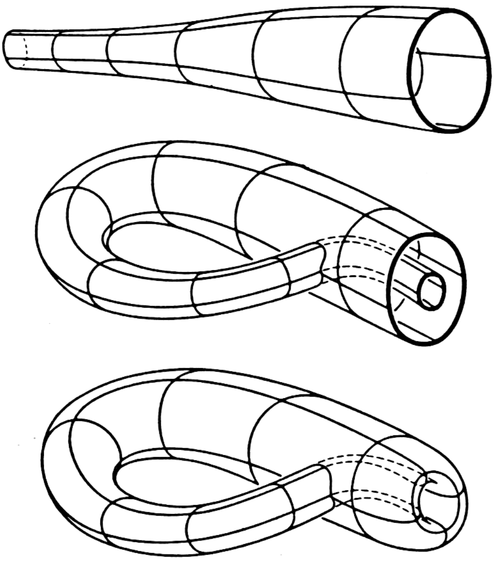


図4.9：ゴム製のクラインの壺を貼り付ける．

クラインの壺の局所幾何は，いたるところ平坦です．ですから，局所的な実験をするFlatland人には，クラインの壺をトーラスとか面とかに区別でき

ないでしょう．クラインの壺は正方形の中心に対応する領域だけでなく，縁や隅が交わる領域でも平坦であるのに注意することは大切です．図4.10は4隅がどのように合っているかを示すものです．(ついでながら，貼り付けることによってできた「合せ目」は，すべて消しておかねばなりません．それらはクラインの壺そのものの一部ではありません．）クラインの壺は我々の扱う等質な曲面の第3の例であり，残り2つは(平坦な)トーラスと球面です．

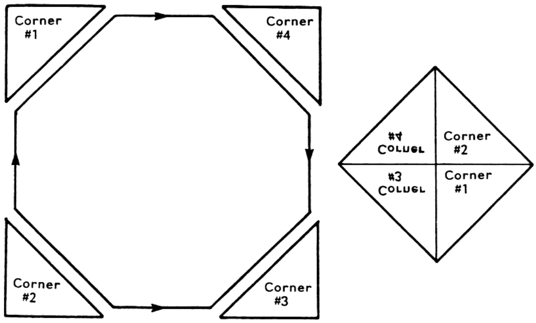


図 4.10：クラインの壺において，正方形の4隅が合う状態．

旅人を鏡像の状態で出発点に戻すような曲面あるいは3-多様体における道を**向き付けを逆にする道**と呼びます．向き付けを逆にする道のない多様体は**向き付け可能**と呼ばれ，向き付けを逆にする道をもつ多様体は**向き付け不(可)能**と呼ばれます．クラインの壺は向き付け不能な曲面です．3-トーラスは向き付け可能な3-多様体です．しかし，向き付け不能な3-多様体についてはどうでしょうか？

クラインの壺を作ったのと全く同じようにして，向き付け不能な3-多様体が作れます．まず，部屋の空間から始めます．3-トーラスの場合と全く同じように，右側の壁に貼り付けた左側の壁と，床に貼り付けた天井を想像します．ただし，今度は左右を逆にして後ろの壁に貼り付けた前の壁を想像して下さい．もしあなたが前の壁を通って歩いていくと，鏡像状態で後ろの壁か

ら戻ります！もう一度そこを歩いて通ると，普通の状態で戻ります．

演習問題4.9　この3-多様体の後ろの壁を覗くと何が見えるか？他の壁についてはどうか？　□

3-トーラスで作ったようなジャングルジムを含むこの新しい3-多様体を想像しましょう．ここで友人と遊ぶのはとてもおもしろいでしょう．友人と出会うと，友人が時には右ききであり，また時には左ききであることに気づくでしょう．どちらの手が左手か当てられなければ捕えても何にもならない特別な鬼ごっこができるでしょう．頭の中央で髪を分けている人は明らかに有利ですし，何か文字を書いたTシャツは問題外でしょう．

演習問題4.10　向き付け不能な3-多様体でできるおもしろいことを他にも考え出すこと．例えば，夜中に友人の靴を片方盗み，それを向き付けを逆にする道で持ち歩き夜明け前にそっと戻しておくとか．□

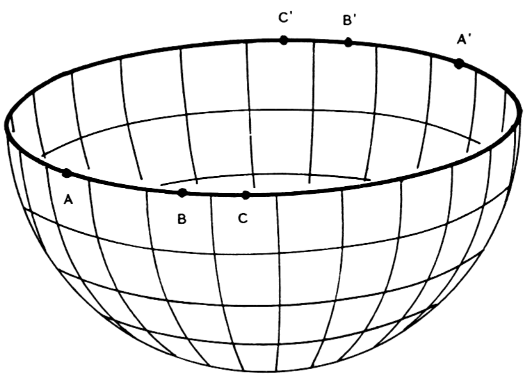


図4.11：射影平面は半球の縁の相対する点を貼り付けて構成する．

射影平面は，局所的には球面のような曲面ですが異なる大域位相をもっています．それは半球面の縁の相対する点を貼り付けて構成します（図4.11）．

図4.12は，この貼り付け方が縁の短い部分で，局所的にどのように見えるかを示しています．どこであろうと縁の任意の部分に沿った貼り付け方は示せますが，その特殊な大域的性質のために，同時に貼り付け方のすべてを示すことはできません．したがって，球面を視覚化したときのように，同時にすべてのものを視覚化しようとするよりも，むしろ縁の相対する部分がどのように合うかを理解することに集中すべきです．最も大切なことは，縁の相対する部分を貼り付けたとき，半球面の幾何が完全に適合し貼り付けられている「合せ目」に沿った所でも，射影平面は球面と同じ局所幾何をもつということです．射影平面は我々の第 4 の等質な曲面です．

演習問題4.11　射影平面は向き付け可能か？すなわち，もし Flatland 人が「縁」を横切るならば，彼は普通で戻るか，それとも鏡像の状態で戻るか？

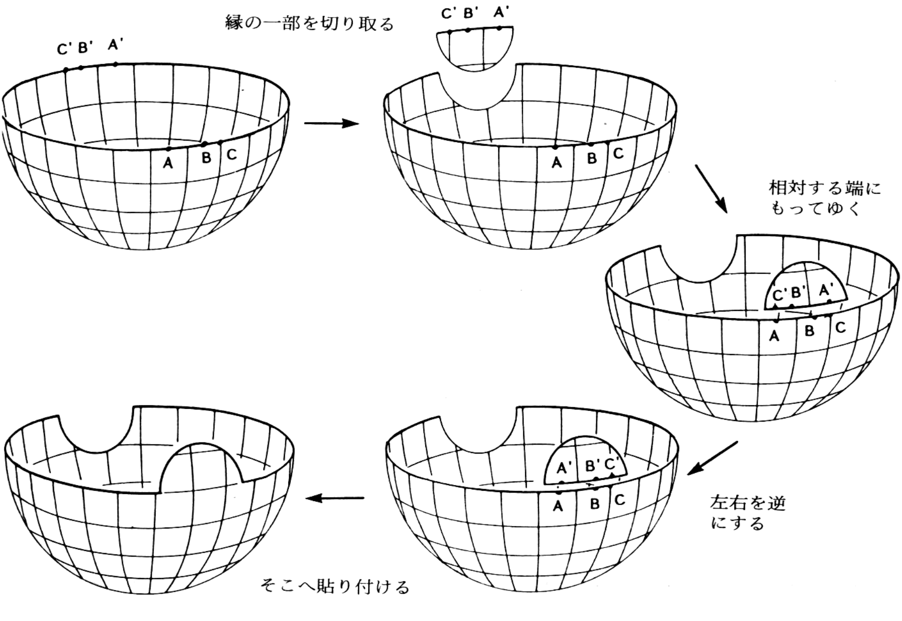


図 4.12：相対する縁の部分の貼り付け方．

演習問題4.12　あるFlatland人は相対する縁の点を貼り付けた半球面として視た射影平面に住んでおり，そのFlatland人の家は「南極」にある．ある日，彼は家を出て，再び家に帰り着くまで直線（すなわち，測地線）を歩く．この道筋のどの地点で彼は最も家から離れているか？　□

演習問題4.13　Flatland人の社会は射影平面上にあり，彼等には2つの消防署を建てる計画がある．最も効果的にするには，その消防署をできる限り離すべきである．どこに消防署を建てればよいか？（注意：半球面の縁の相対する点は，射影平面において同じ点を表わす.）3つの消防署を最も効果的に設置するには，どのような位置に建てるべきか？　□

演習問題4.14　あるFlatland人には球面上か射影平面上のどちらかに住んでいることがわかっている．それがどちらであるかどうしてわかるか？　もう1人のFlatland人は射影平面上かクラインの壺上かそのどちらかに住んでいることがわかっている．彼はどのようにして決められるか？　□

演習問題4.15　これまで，我々は球面，トーラス，クラインの壺，射影平面の，4枚の等質な曲面を見てきた．これらを用いて図4.13の表を埋めよ．□

	向き付け可能	向き付け不能
曲がった局所幾何		
平坦な局所幾何		

図4.13：球面，トーラス，クラインの壺，射影平面でこの表を埋められる．どこにどれを入れるべきか？

もし射影平面の位相的な性質のみに興味があるならば，相対する境界上の点を貼り付けることを思い出し(図4.14)，半球面を平らにして円板にできます．このようにする主要な利点は，半球面より円板の方が描きやすいということです．

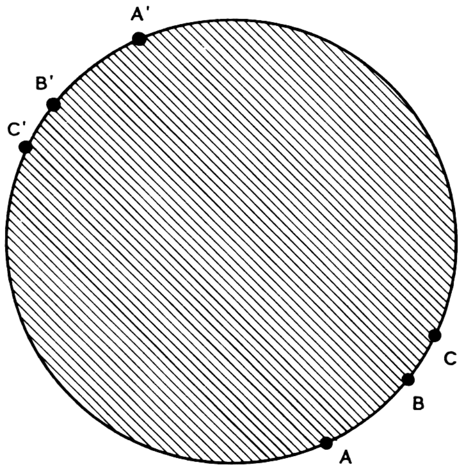


図 4.14：位相的には，射影平面は相対する境界上の点を貼り付けた円板である．

更に位相的に考えるならば，中身の詰まった3次元の球体の相対する境界上の点を貼り付けることによって，**3-射影空間**を構成できます．第14章で超球面の幾何を学習する際に，その幾何を研究しましょう．

演習問題4.16　3-射影空間は向き付け可能か？もし境界を横切ると，どのようにして戻って来るか？　□

演習問題4.17　向き付け可能性は局所的性質か，または大域的性質か？また，それは位相的か，幾何的か？　□

5

連結和

Flatland 物語の結び

鏡像状態になった調査隊員達は，大抵の者が予期したより早く新しい環境に順応しました．最も難しかったのは，正しい字を書くことでしたが，これもしばらくすると，慣れました．そして，彼らの適性が増すにつれて，社会の方でもどんどん受け入れるようになり，事態は正常な状況に戻ったのです．

実のところ，歳月が経つと共に，人々は些か冒険的にさえなりました．ほとんど毎週，誰かが探険に出かけました．勿論，探険家達が鏡像状態で戻ってくる事件がよく起こりましたが，もはや大惨事というほどのものではありませんでした．逆転した探険家達は，すぐに社会復帰しました．その上，逆転の事故はある「逆転地域」を通った人に限られていました．Flatland のその他の地域はかなり無害のようで，その地域への旅行は全く日常的なものになりました．

不慮の逆転から旅行者を守るために，逆転地域にはその境界に沿って十歩毎に石塊で印を付けることにしました．こうすると，最も臆病な Flatland 人でも安全地域での旅行が楽しめたのです．

間も無く安全地域を公式に調査することになりました．その結果，Flatland の形について当初，提案された理論の１つと一致して安全地域はドーナツ曲

面（図5.1）と似ていることが調査隊員にわかったのです。

しかし，これは，Flatlandが全体としてドーナツ曲面であることを意味するものではないと直ちに指摘した人達もいました。例えば，もし逆転地域もドーナツ曲面に似ているとすれば，Flatlandは2穴ドーナツ曲面ということになるでしょう（図5.2）。

好奇心が恐怖を克服し，逆転地域の調査が始まりました。最も勇敢な調査隊員だけが調査を申し出ました。もう十分にありふれたものになっていましたから，逆転することを恐れたのではありません。彼らは*2度*逆転することを恐れていたのです！ 2度目の逆転は，確実に死に至るというのが一般の世評でした。（2度目の逆転で，犠牲者は元の状態に戻れるという少数意見もありましたが，この意見は新聞でもあまり是認されませんでした。）

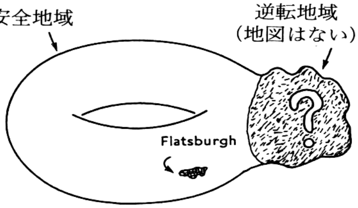


図5.1：Flatlandの安全地域がまず地図に記された。

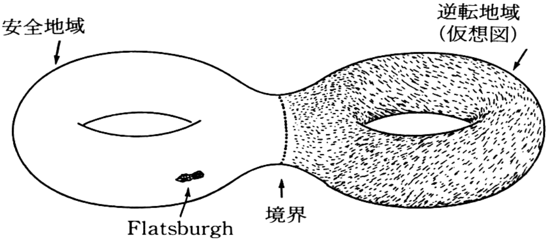


図5.2：もし安全地域と逆転地域がそれぞれドーナツ曲面に似ているとすれば，Flatlandは全体として2穴ドーナツ曲面であろうと人々は直ちに指摘した。

調査は２段階に分かれました．第１段階は逆転地域がどれ位大きいか大まかに推測することを目的にし，第２段階で詳細に地域を区分して作図することにしました．

３名の調査隊員が鏡像状態で戻って来たものの，第１段階は何事もなく事が運びました．しかし，これら逆転した調査隊員は勇敢にも逆転地域に戻り，第２段階の精密な調査の手助けをしました．実際，彼らは誰が一番勇敢で最初に戻って来るか，くじ引きさえしました．

第１段階の終了後，逆転地域は８つの区域に区分されました．第２段階中に詳細に作図するために，別々のチームが各区域に派遣されました．すべての作業はロシア・ルーレット風で，逆転する危険な区域を自分達が作図しているのではないかと各チームがいぶかっていました．誰もが驚いたことに――また，安心したことに――８チームすべてが，調査したそれぞれの区域が完全に正常であると報告したのです．

各区域のデータを集め，整理し，比較してみて初めて事態は不思議な様相になりました．各区域が図5.3のようにつなぎ合わされていることに気づいたのです．奇怪なことに，区域１が７ではなく８につなぎ合わされ，７につなぎ合わされているのは２でした！区域はそのように混乱した状況でつながっていたのです！

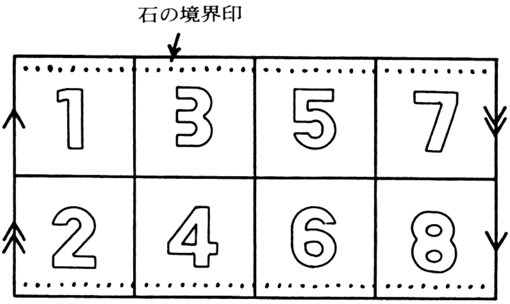


図5.3：８つの区域がどのようにつなぎ合わされたか．

そのうち混乱は啓蒙に変わりました．鏡像逆転現象は，結局それほど不思議なことではないと Flatland 人は悟ったのです．これはただ逆転地域を旅したすべての人は右側であったところが左側，左側であったところが右側となって戻ってくるという風に Flatland の空間がつながっているだけなのです．Flatland 人はメービウスの帯を発見していたのです！

これはとても知的な業績でしたが，同時に実際的な業績でもありました．逆転した調査隊員はすべて元の状態に戻るように逆転地域に派遣されました．それ以後，逆転地域は主としていたずらか娯楽のために用いられたのです．

このようにして，全調査は完了しました．Flatland は 2 つの地域，1 つはメービウスの帯，もう 1 つはトーラスに似たものからできていることを調査隊員達は疑う余地もなく確認したのです．その後いつまでも Flatland 人は幸せに平和に暮らしましたとさ．―終り―

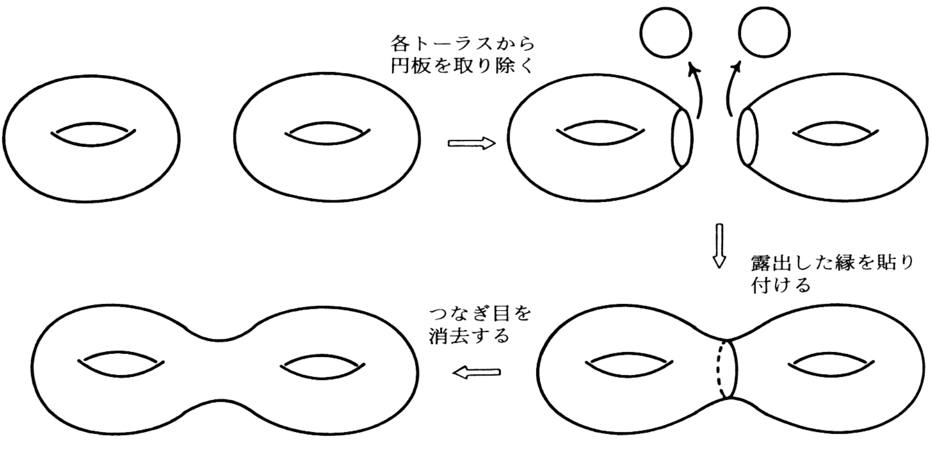


図 5.4：2 つの 1 穴ドーナツ曲面を 1 つの 2 穴ドーナツ曲面に転換する方法．

注意：本章のすべての曲面は位相的に考えるから，好きなように曲げたり，捩ることができる．

図5.2でFlatland人が指摘したように，2穴ドーナツ曲面は，2つの1穴ドーナツ曲面を貼り付けたものにとてもよく似ています．実のところ，2つの1穴ドーナツ曲面のそれぞれから円板を切り取り，その露出した縁を貼り付けて2穴ドーナツ曲面を作ることができます（図5.4参照）．この操作を**連結和**と呼びます．

演習問題5.1．2穴ドーナツ曲面と1穴ドーナツ曲面の連結和を構成すると何が得られるか？6穴ドーナツ曲面と11穴ドーナツ曲面の連結和は何か？
□

演習問題5.2．2穴ドーナツ曲面と球面の連結和を構成すると何が得られるか？クラインの壺と球面ではどうか？射影平面と球面とでは？　□

演習問題5.3．この演習問題の目的は，射影平面から円板を切り取るとき何が得られるかを学ぶことである．この情報を用いて演習問題5.4では2つの射影平面の連結和がどうなるかを推論できる．下書き用紙を用意し，次のそれぞれについて絵を描きながら，次の段階の作業を行なうこと．

1. （位相的な）射影平面を相対する点を貼り付けた円板として描く；
2. 小さな円板を射影平面の中心から取り除く；
3. 残りを図5.5のように2つの湾曲部に切り取り，指示されているように縁に矢印をつける；
4. それぞれの湾曲部をまっ直ぐにして長方形にする．我々は射影平面の*位相的*性質を研究しているから，ゴム製のもののように各片を曲げてもよい．どの矢印がどの辺の上にあるのか見失わないように；
5. 1重の矢印の付いた2つの長い辺を物理的に貼り付ける．ただし，このとき，一方を裏返して貼り付けること；
6. 2重と3重の矢印のついた辺を物理的に貼り付ける．これは3次元空間で行なわなければならない——平面ではできない．

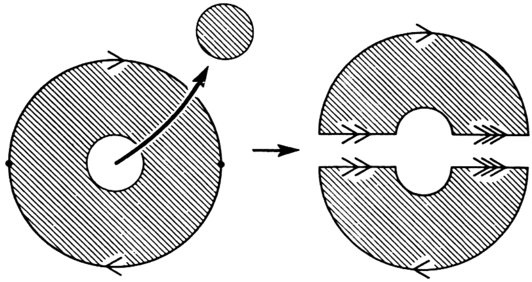


図 5.5：円板を射影平面から取り除き，それから残りを図のように 2 つの部分に切る．

作られたものは，位相的には，円板を取り除いた射影平面と同一である．通常の名前は何か？ □

演習問題 5.4. 2 枚の射影平面の連結和は何か？ヒント：2 枚の射影平面より始め，その各々から円板を切り取ると，前の演習問題で見つけた 2 枚のものを得る．さて図5.6と次の 5 行戯詩を参考にして，その 2 枚のものを貼り付けたとき，何が得られるか調べよ．

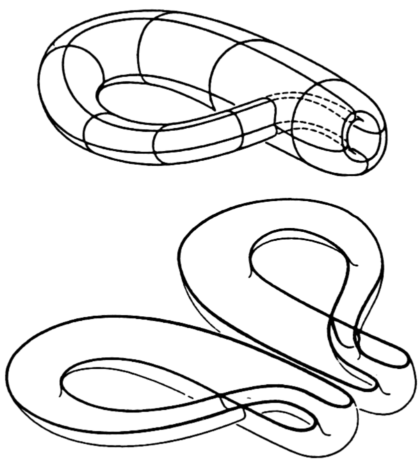


図 5.6：クラインの壺を 2 片に切る．

Klein という名の数学者が

メービウスの壺は神聖だと考えました．

彼が言うには

「もし2つの縁を貼り付けたら，

私のような奇妙な壺ができるでしょう」□

演習問題 5.5． 本章の初めの物語では，Flatland はどのような2枚の曲面の連結和であったか？ □

大抵の簡単な多様体には，通常，上付き添字で次元を示して書く略名があります．例えば，我々が現在までに研究した曲面は次の通りです．

E^2	（ユークリッド）平面
S^2	球面
T^2	トーラス
K^2	クラインの壺
P^2	射影平面
D^2	円板

ところで，ドーナツ曲面と平坦なトーラスには位相的な違いはありませんから，「T^2」の省略形は，状況によってそれらのいずれか，あるいは両方を表わすことにします．これまで見てきた3-多様体は次の通りです．

E^3	「通常の」3次元(ユークリッド)空間
T^3	3-トーラス
D^3	球体（すなわち，3次元「円板」）
P^3	3-射影空間

我々の調べてきた向き付け不能な3-多様体にも名称があります．その名称は構造をいわゆる「積」として記述し，次章に出てきます．1次元多様体にも次のような省略形があります．

E^1　直線

S^1　円

I　区間（すなわち，両端点を含む線分）

連結和の操作は記号「#」で表わします．例えば，2穴ドーナツ曲面は位相的には2枚のトーラスの連結和ですから，$T^2\#T^2$と表わします．同じく，3穴ドーナツ曲面は$T^2\#T^2\#T^2$です．Flatlandの位相は簡単に$T^2\#P^2$と書きます．この記号で方程式も表わせます．例えば，演習問題5.4では$P^2\#P^2=K^2$を発見しています．

演習問題 5.6．上記の記号を用いて演習問題5.2の結果を述べよ．□

今世紀に変る頃，数学者は*すべての*考えうる曲面はトーラスまたは射影平面の連結和であることを発見しました！（球面は零トーラスと零射影平面の連結和と考えます．これはわざとらしく聞こえるでしょうが，都合がいいのです．演習問題5.2を考えると，それほど不合理なことではありません．）言い換えると，次の表が可能なすべての曲面の完全なリストなのです．あなたが出会う曲面はどんなものも，位相的には，この表にある曲面に同値なのです．例えば，クラインの壺は$P^2\#P^2$であり，表の第1列の第3番目にあります．

射影平面の個数

トーラスの個数	0	1	2	3	・・・
0	S^2	P^2	$P^2\#P^2$	$P^2\#P^2\#P^2$	・・・
1	T^2	$T^2\#P^2$	$T^2\#P^2\#P^2$	$T^2\#P^2\#P^2\#P^2$	・・・
2	$T^2\#T^2$	$T^2\#T^2\#P^2$	$T^2\#T^2\#P^2\#P^2$	⋮	
3	$T^2\#T^2\#T^2$	$T^2\#T^2\#T^2\#P^2$	⋮	ETC.	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

演習問題 5.7. 位相的に

(a) $K^2\#P^2$,　　(b) $K^2\#T^2$,　　(c) $K^2\#K^2$

に同値な曲面をこの表から求めよ. □

この表には重複がありますか？例えば，実は$T^2\#P^2$は$P^2\#P^2\#P^2$と同じ曲面かもしれませんね. 驚いたことに，実際，この表には重複が*あります*. $T^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2$ は正しいのです！

演習問題 5.8. この演習問題で，$T^2\#P^2=K^2\#P^2$であることがわかるが，演習問題5.9では，この情報を用いて，$T^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2$であることが推論できる. 図5.7のそれぞれの図は説明文が意味するものを表わしていることを確認せよ. 演習問題5.3より円板をメービウスの帯の縁に貼り付けるとメービウスの帯が射影平面になると推論できる. したがって，もし円板をその縁に貼り付けると，$T^2\#$(メービウス)は$T^2\#P^2$となり，また円板をその縁に貼り付けると，$K^2\#$(メービウス) は$K^2\#P^2$となる. $T^2\#$(メービウス) と$K^2\#$(メービウス) は位相的に同じであるから (その理由については図5.8を研究せよ), $T^2\#P^2$と$K^2\#P^2$も同じでなければならない. (とても変なことだが，これはT^2とK^2 が同じであることを意味するわけではない！数の加法・乗法とは異なり，連結和には「簡約法則」は成り立たない.) □

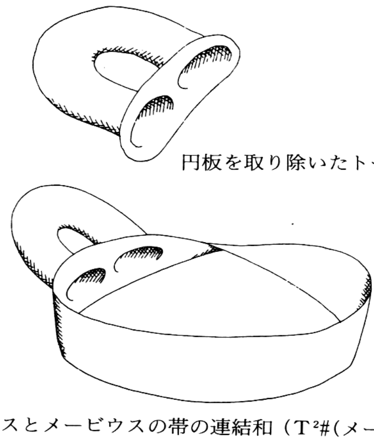


図 5.7：それぞれの図は説明文が意味するものを表わしていることを確認せよ.

演習問題 5.9. 2，3 節前で主張した$T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$を証明せよ.（ヒント：これはやさしい！単に演習問題5.4と5.8を結びつけよ.）□

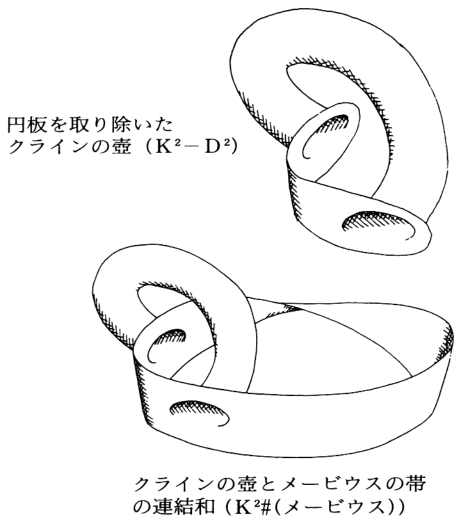


図 5.7：(続き)

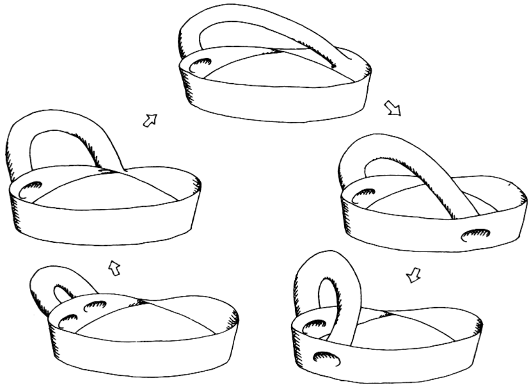


図 5.8：T^2#(メービウス) と K^2#(メービウス) は，一方をもう一方に変形できる．したがって両者は位相的には同じである．この種の変形をしようとするとき，*本物の*ゴムは勿論破れるが，位相的にはそういう厄介なことは心配しなくてよい．

演習問題 5.10．すべての曲面がトーラスまたは射影平面の連結和であることを仮定して，すべての曲面はトーラス*だけ*か，あるいは，射影平面*だけ*の連結和であることを導き出せ．すなわち，すべての曲面は位相的に次の 2 つの表のいずれかの曲面に同値である：

$$S^2$$

T^2	P^2
$T^2\#T^2$	$P^2\#P^2$
$T^2\#T^2\#T^2$	$P^2\#P^2\#P^2$
$T^2\#T^2\#T^2\#T^2$	$P^2\#P^2\#P^2\#P^2$
……	……

この表において $T^2\#P^2$ (Flatland 物語の曲面) はどこに表われるか？$T^2\#K^2$, $P^2\#S^2$, $S^2\#S^2$ はどこにあるか？この表のどの曲面が向き付け可能か？

第12章で，この新しい表のすべての曲面が，実は異なっていることがわかる．□

演習問題 5.11. A列の各曲面を位相的に同値なB列の曲面に対応させよ.

A列	B列
$T^2 \# S^2$	$P^2 \# P^2$
K^2	$K^2 \# P^2$
$S^2 \# S^2 \# S^2$	$S^2 \# S^2$
$P^2 \# T^2$	$P^2 \# P^2 \# P^2 \# K^2$
$K^2 \# T^2 \# P^2$	T^2

□

2つの3-多様体の連結和についても議論できます(それぞれから球体を取り除き，露出した球状の境界に沿って残りの3-多様体を貼り付けます).

6

積

円柱は円と区間の**積**です．それはいずれも

1．円状に並べられた１束の区間，と

2．区間状に並べられた（この場合は積み重ねる）１束の円

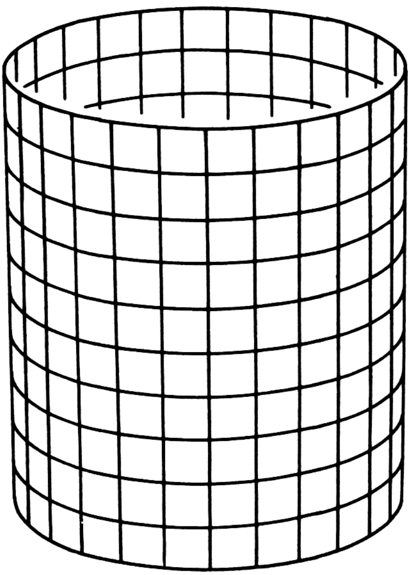


図 6.1：円柱は円と区間の積である．(「区間」とは両端点を含む線分であることを思い出すこと．)

ですから，このようなものとして資格があります（図6.1参照）．もっと正確に言うならば，円柱は(1)区間からなる円であり，かつ(2)円からなる区間ですから，円と区間の積です．これを $S^1 \times I$ と略記します．

トーラスは積の第2の例です．それは(図6.2で太く描かれている）1つの円と（細く描かれている）もう1つの円の積です．これは，トーラスは2つの違ったように考えた——細い円からなる太い円として，かつ太い円からなる細い円として——円からなる円だからです．この事実を式 $T^2 = S^1 \times S^1$ と略記します．図6.2のトーラスはドーナツ曲面として描いていますが，我々はその位相にのみ興味があるので，これでいいのです．

〔ところで，トーラスは積である唯一の(縁のない）閉曲面です．その理由は，2次元の積は2つの1次元のものの積でなければならず，また，円は(区間のような）端点もなく（直線のような）無限の長さももたない唯一の1次元のものであるということです．このように，$S^1 \times S^1$ は縁も無限の面積ももたない唯一の2次元の積です．〕

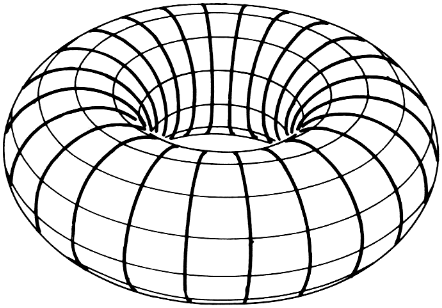


図 6.2：トーラスは円×円である．

演習問題 6.1． 次の各々の積の通常の名称は何か：

1．$I \times I$

2．$E^1 \times E^1$

3．$S^1 \times E^1$

4．$E^1 \times I$．□

演習問題 6.2. メービウスの帯は積か？ □

演習問題 6.3. $D^2 \times S^1$ は何か？位相的に考えよ. □

乗法という意味では，多様体の積と数の積との間には関連があります．例えば，15 は 3 と 5 の積であり，図6.3の 15 頭の羊は 5 頭の 3 行にも，3 頭の 5 列にもなっています．

我々の例——円柱——は，位相的な意味だけでなく，幾何的な意味においても積です．正確に言えば，次の 3 条件を満たすので**幾何的**な積としての資格があります：

1. すべての円は同じ大きさである；
2. すべての区間は同じ長さである；
3. 各円は各区間に対して垂直である．

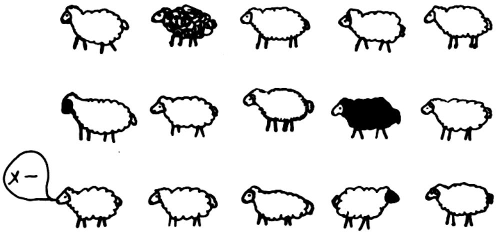


図 6.3：15は 3 と 5 の積である．

演習問題 6.4. 図6.4は（幾何的ではなく）位相的な積である $S^1 \times I$ を 3 通りの解釈で表わしたものである．それぞれの例において，上の 3 条件のどれが満たされていないか？ □

演習問題 6.5. 幾何的な積である $I \times I$ の解釈と位相的な積にすぎない別の解釈を描け．

図6.2のドーナツ曲面は，細い円がすべて同じ大きさとは限らないので，幾何的な積ではありません．実際，3-次元空間に幾何的な $S^1 \times S^1$ は決して描くことはできません．我々にできることは，精々図6.1のように円柱を描き，上端を下端に貼り付けることを想像するくらいです．貼り付けることによって，各々の垂直な区間は円に変わり，それによって $S^1 \times I$ は $S^1 \times S^1$ に変わるのです．この新しい積が幾何的な積であることは次の3つの条件よりわかります：

1．すべての元の円は同じ大きさである；
2．円に変わるすべての区間は同じ長さである；
3．各円は各区間に垂直である．

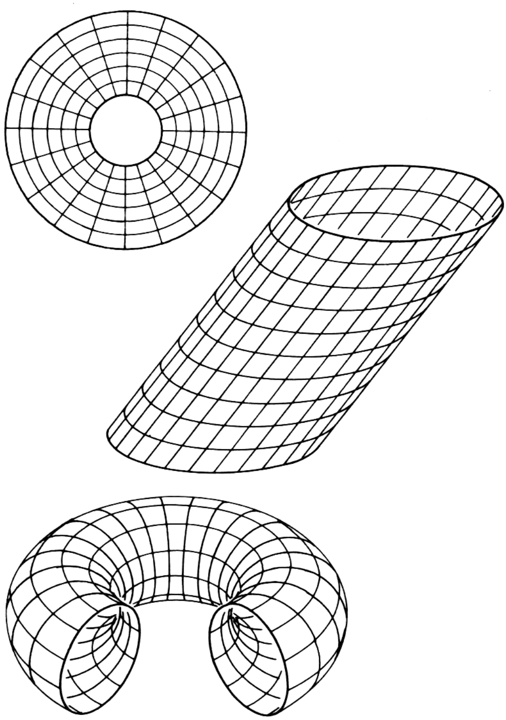


図 6.4：（幾何的ではなく）位相的な積である $S^1 \times I$ の3通りの解釈．

しかし，この縁を貼り付けた円柱が平坦なトーラスであることも我々にはわかっています．したがって，幾何的な $S^1 \times S^1$ は平坦なトーラスなのです！

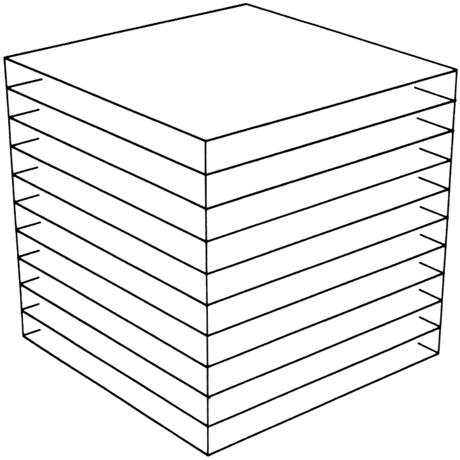


図 6.5：3-トーラスは 2-トーラスと円の積である．

積を研究する主な理由は 3-多様体をよく理解するためです．確かに，大部分の 3-多様体は積ではありませんが，最も単純で，最も興味深いものの多くは積になっています．例えば，3-トーラスは 2-トーラスと円の積です（記号では $T^3 = T^2 \times S^1$）．これは次のようにしてわかります．3-トーラスは相対する面を貼り付けた立方体であることを思いおこしましょう．この立方体が図6.5のように平行な層の積み重ねからできていると想像します．立方体の側面を貼り付けると各平行な層がトーラス——実は平坦なトーラス——に変わります．この段階で，平坦なトーラスの積み重ねができます．立方体の上面を下面に貼り付けると，トーラスの積み重ねはトーラスの円に変わります．それでも，T^3 は円のトーラスでもあることを確かめなくてはなりません．これを行なうために，立方体は，平行な層ではなく，垂直な区間——沢山のスパゲティが端を下に立っているような——で埋まっていると想像します（図6.6）．立方体の側面を貼り付けると，この区間からなる正方形が区間からなる

トーラスになり，上面と下面を貼り付けると，求める通り円からなるトーラスになります．このようにして，3-トーラスはトーラスからなる円でもあり，円からなるトーラスでもあるから，これはトーラスと円の積になるのです．

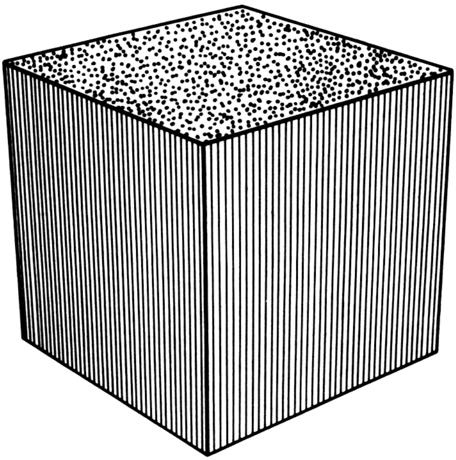


図 6.6：T^3 が円のトーラスであることを見るために，まず端を下に立っているスパゲティで埋まっている立方体を想像する．

実際，3-トーラスは，次の理由から幾何的な積なのです：

1．すべての平行なトーラスは同じ大きさである(図6.5)；

2．すべての垂直な円は同じ大きさである（図6.6)；

3．各トーラスは各円と垂直である．

演習問題 6.6．第4章では，左右を逆にして部屋の前の壁を後の壁に貼り付け，また床を天井に，左壁を右壁に普通の方法で貼り付けて，向き付け不能な3-多様体を構成した．この向き付け不能な3-多様体は積である．これは何の積になっているか？（ヒント：それを表わす図はただ貼り付け方が違うだけで，図6.5と6.6に全くよく似ている．）これは幾何的な積になっているか？ □

真新しい局所幾何をもつ真新しい 3-多様体の時代です！この多様体は $S^2 \times S^1$ ですが，これを研究する前に，しばらく休憩して Flatland 人がどのように $S^1 \times S^1$ を扱うかを見てみましょう．

Flatland 人には直接 $S^1 \times S^1$ を視ることはできませんから，知的なトリックを用います．まず図6.7 のように $S^1 \times I$ を想像し，次に内側（の円状）の縁を外側（の円状）の縁に貼り付けることを想像します．もし幾何的な積が欲しいならば，さらに，すべての円は同じ大きさであると思い込まねばなりません！　頭の中のイメージでは明らかに違うとき，これらの円が同じ大きさであると思い込むのは最初は難しいものです．しかし，そうすることが，$S^1 \times S^1$ を理解する手助けになり，この矛盾に耐えられて，ついに $S^1 \times S^1$ が*本当には*どういうものか，次第に直観的な感じが得られるようになります．

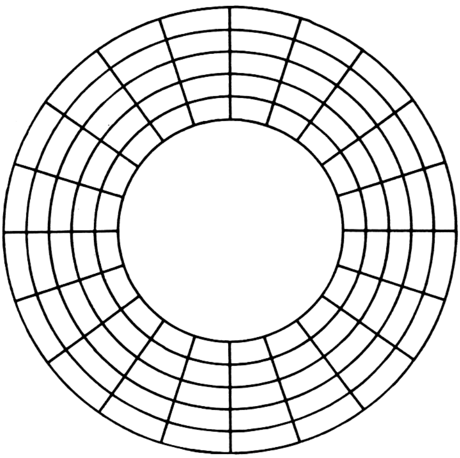


図 6.7：Flatland 人が想像するような $S^1 \times I$.

実は Flatland 人が最も受け入れにくいのは，図6.8 に示された 2 点間にぴんと張った糸が明らかに円の 1 つの湾曲した弧を辿るということです．（図6.8 の右図のように）3 次元空間に住むものがもっと巧妙に描けば，この糸が円を*辿ろうとする*のは明白です．しかし Flatland 人には，糸はとにかく「中

央を横切ろうとする」かのように見えるのです．

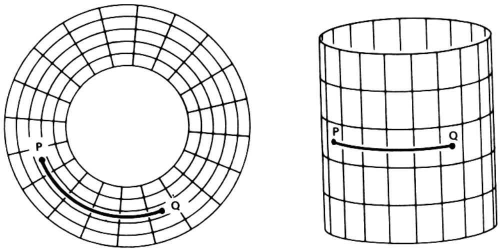


図 6.8：P，Q間に張った糸は図のような道を辿る．

我々 3 次元空間に住むものは，Flatland 人が $S^1 \times S^1$ を描くのと同じように，$S^2 \times S^1$ を描きます．まず，厚みのある球状の殻として $S^2 \times I$ を視ます．この殻を $S^2 \times S^1$ に変えるために，内側の球状の境界を外側の球状の境界に貼り付けることを想像します．もし幾何的な積が欲しいならば，物事はもっと難しくなります．つまり，球状の殻の種々な球状の層がすべて同じ大きさであると思い込まねばなりません！（4 次元の生きものには，層が実は同じ大きさである絵を描くのは面倒もないでしょうが，我々 3 次元空間に住むものにとっては，そう易しいことではないのです．）

図6.10は幾何的な $S^2 \times S^1$ に含まれる 2 つのおもしろい曲面を示しています．灰色の部分は $S^2 \times S^1$ の球状の「断面」です．この球状の任意の 2 点間に張られた糸は球面の湾曲した曲面を辿ります！ 4 次元の生き物には，これは全く明らかなことでしょう．つまり，4 次元の生き物が描く際には，糸が球面のどちらか一方の側に曲がるなどということはないのです（図6.8(b)参照)．しかし，我々素朴な 3 次元の生きものにとっては，糸がとにかく「中央を横切る」かのように（間違って！）思えるのです．もし Gauss が $S^2 \times S^1$ に住み，この球面上の 3 点によって形成された三角形を調査するようなことがあれば，（図3.7を思い出すと）任意の球面三角形の角の和と全く同様に，三

角形の角の和が180°より大きいことに気付くでしょう.

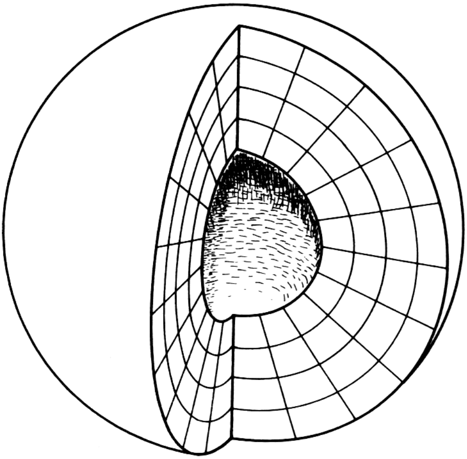


図 6.9：空洞の中心をもつ球体として $S^2 \times I$ を視る.

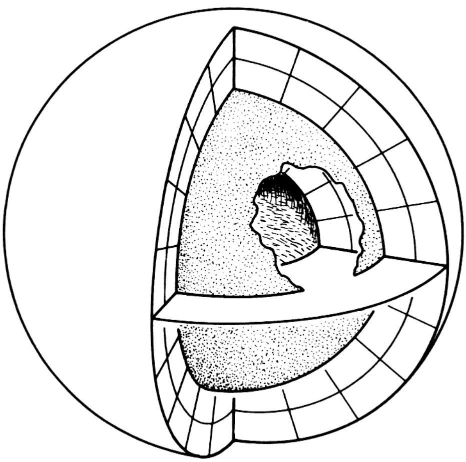


図 6.10：$S^2 \times I$ の内側の曲面を外側の曲面に貼り付けることを想像して得られるものが 球面×円 である. この貼り付けによって水平の環状の曲面がトーラスに変わる. 勿論, 灰色の球面はこの貼り付けによっても影響を受けない.

図6.10の白い曲面は平坦なトーラスです．それは図6.7に基づくような Flatland 人の平坦なトーラスの概念とよく似ています．もし Gauss がこの曲面の三角形を測定するようなことがあれば，彼はその角の和が180°になっていることを見つけるでしょう．

これまで見てきたように，$S^2 \times S^1$ において，異なる三角形は，その置かれている場所によって，異なる角の和をもちます．ですから，$S^2 \times S^1$ は等質であるが，等方的で*ない* 3-多様体の1例です．**等質**多様体とは，その局所幾何がいたる所で同じであるようなものです．**等方的**多様体とは，*すべての方向において*幾何が同じものです．$S^2 \times S^1$ は前の2節で調べたように，2次元断面には球面の局所幾何をもつものもあり，また平面の局所幾何をもつものもあるので，等方的ではありません．(等質多様体と等方的多様体の相違は，曲面には等質であるが等方的ではないものが存在しないという特殊な事実のために，大抵の3次元の空間の生き物にはそうたやすくはわからないのです．)

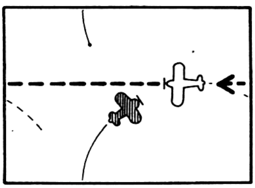
演習問題6.7. 積であり，$S^2 \times S^1$ と同じ局所幾何をもつ向き付け不能な3-多様体を求めよ．ヒント：このような多様体は何の積であろうか？ □

さて，これで我々は無限個の3-多様体を自由に使えます．とりわけ，演習問題5.10の表の各曲面を用いて，その曲面と円の積を構成することができます．例えば，5穴ドーナツ曲面×円 を構成できます．丁度，球面×円 ($S^2 \times S^1$) を内側を外側に貼り付けた厚みのある球面として描いたときと同じように，位相的には，この多様体は内側を外側に貼り付けた厚みのある5穴ドーナツ曲面として描けます．これら積3-多様体の幾何は曲面の幾何を研究して初めて理解できるでしょう（第10,11,18章参照）．

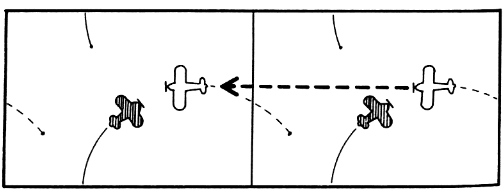
7

平坦な多様体

もし閉3-多様体に住めば何が見えるでしょうか？本章では，例えば3-トーラスのような「通常の」3次元空間（すなわち，平坦な3-多様体）の局所幾何をもつ3-多様体について，この疑問に答えます．



パイロットは自分を
見ることができる．

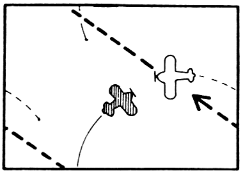


パイロットに状況はどのように見えるか？

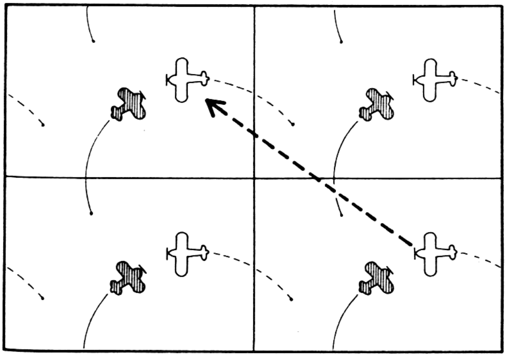
図 7.1：平坦なトーラスにおける複葉機パイロット．

まず2次元複葉機のパイロットが第3章の平坦なトーラスの空を飛び廻わるときに何が見えるか考えてみましょう．もし「スクリーンの端」の方を眺

めると，後ろから自分自身を見ているのに気がつきます！（図7.1参照.）図7.2に描いているように，対角線に沿って見ても自分自身を見ることができます．実際，無限に多くの方向に自分自身が見えます．平坦なトーラスの空は，その中に無限に多くの自分自身の写(コピー)しがある平面のように見えます（図7.3）．勿論，敵の複葉機が追いかけて来ても同じように，無限に多くの敵機の写(コピー)しも見えます．これらの絵はクラインの壺の三目並べを解析するのに第4章で用いた絵に似ています（図4.6）．



対角線に沿って眺めるとパイロットは自分が見える．



パイロットの状況の見え方

図7.2：複葉機パイロットは異なった方向に自分自身を見る．

演習問題 7.1．クラインの壺の中を飛ぶ複葉機パイロットに空がどのように見えるか示す（図7.3 に似ている）絵を描け．□

演習問題 7.2．図4.6の方法を用いて演習問題2.2の トーラス 三目並べのゲームを解析せよ．□

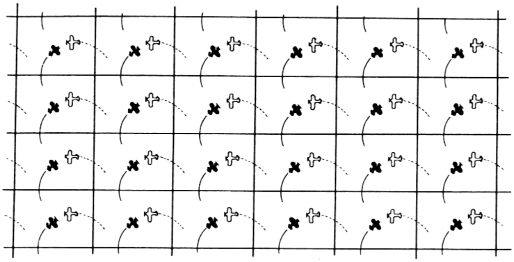


図 7.3：複葉機パイロットの世界観.

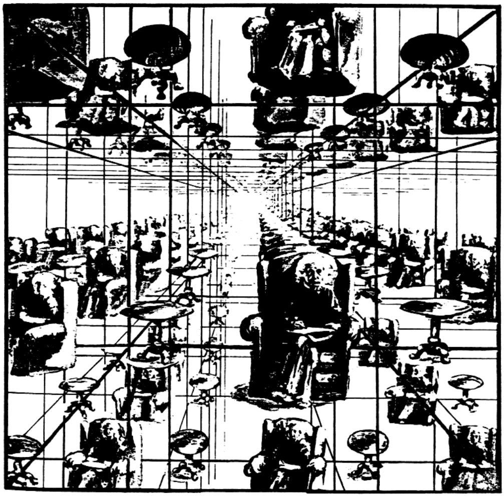


図 7.4：3-トーラスを構成するために部屋の相対する壁を「貼り付ける」と，このように見える.

さて，3-多様体に類似な絵を何枚か描いてみましょう．図7.4は第２章で説明した3-トーラスの内部風景を示すものです．この3-トーラスは左壁を右壁に，前壁を後壁に，床を天井に貼り付けた居間で構成されています．

図7.5は異なった3-トーラスの内部風景です．これは色のついた面をもつもっと小さい立方体（図7.6）を含む立方体でできています．

自分で着色しなさい

色ペンあるいは色鉛筆を用いて，図7.5と図7.6の小さい立方体の面にR＝赤，O＝オレンジ，Y＝黄，G＝緑，B＝青，V＝紫 の記号に従って色を塗りなさい．いずれ図7.7，7.10，7.11，7.12，演習問題7.3の図にも同じように色を塗るのが必要になります．

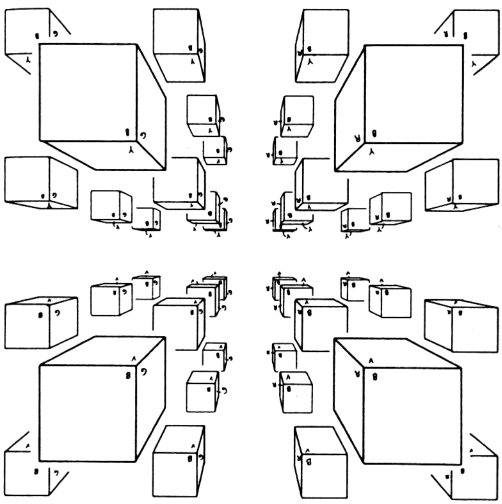


図 7.5： 1個の小さな立方体を含む 3 - トーラスの内部風景．

図7.6の(大きい)立方体からできたその他の 3 -多様体の内部風景を想像するのは楽しいものです．例えば，この立方体から $K^2\times S^1$ を構成することを考えてみましょう．($K^2\times S^1$ は第 4 章で説明した向き付け不能な 3 -多様体で，通常のように，立方体の上下の面，左右の面を貼り付けますが，前後の面は左右を逆にして貼り付けて作られています．) $K^2\times S^1$ の内部を見るために，記号で指示された通りに図7.7を着色してみましょう．重要な注意：小さい

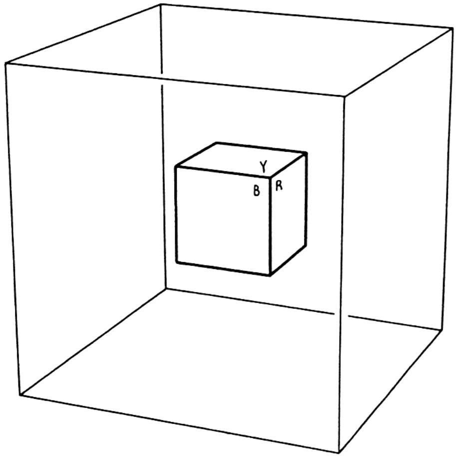


図 7.6：この(大きい)立方体の相対する面を貼り付けると，その結果できる 3 - トーラスの内部風景は図7.5のようになる．

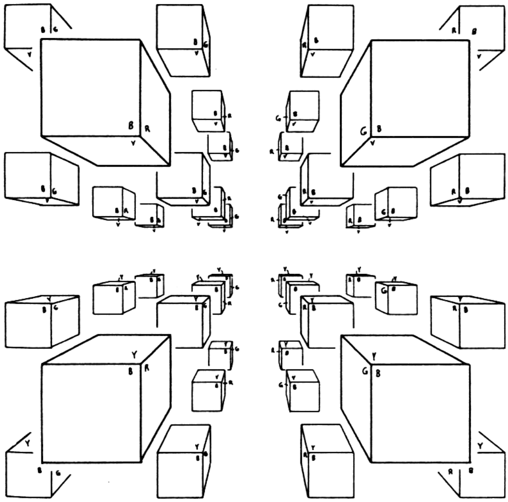
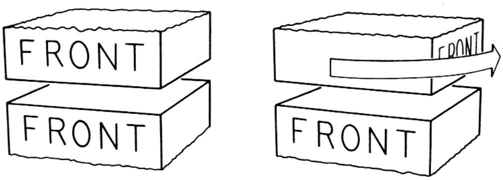


図 7.7：$K^2 \times S^1$ の内部風景．

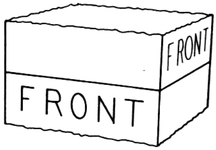
立方体では，相対する面は補色になっています．すなわち，赤の反対は緑，青の反対はオレンジ，黄の反対は紫となっています．図7.7の立方体の１つに腰掛けている自分を想像してみましょう．上下，左右を見ると，図7.5の立方体と全く同じ位置に着色された他の立方体が見えます．しかし，あなたの直前，直後の立方体は左右が鏡像の逆転を受けたように（したがって，赤と緑の面が入れ替って）見えます．これは大きい立方体の前後の面が左右を逆にして貼り付けられているからです．$K^2 \times S^1$ の風景は演習問題7.1で作ったクラインの壺の空の絵に似ています．少し時間をとって，このことをよく考えてみてほしいのです．

演習問題 7.3．ここでは新しい３-多様体，「1/4回転多様体」を考える．すなわち，図7.6のような立方体より始めて，その前後，左右の面は３-トーラスを作るように貼り付けるが，上面は1/4回転させて底面に貼り付ける（図7.8がその方法を示す）．手で描くか複写機によって，図7.9のコピーを作り，着色してこの多様体の内部の風景を示せ．

同様に「半回転多様体」，「3/4回転多様体」の風景も図解してほしい．3/4回転多様体を元の1/4回転多様体と比較せよ．内在的に区別ができるか？ □



立方体の上面と底面をとる，その１つを1/4回転する．



貼り付ける．

図 7.8：立方体の上面を1/4回転させて底面に貼り付ける方法（局所的かつ内在的な絵）．

上の演習問題では，立方体の面がどのように貼り付けられているかという知識に基づいて1/4回転多様体の内部風景を着色しました．この手順を逆にすることもできます．すなわち，多様体の内部風景を着色図解したものが与えられると，どういう貼り付け方をすれば，このようになるのか推論できます．例えば，図7.7において，

1. 各小立方体は——左右が逆になって——その直後の立方体の鏡像になっている：このことから，大きい立方体の前後の面が左右を逆にして貼り付けられていることがわかります．

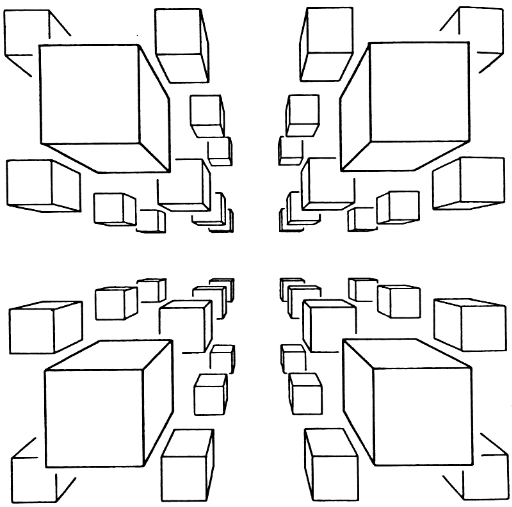


図7.9：この図のコピーを数枚作り，着色して演習問題7.3の各多様体の内部風景を図解せよ．

2. 各小立方体はその上の立方体と同一である：このことから，大きい立方体の上下面が普通に貼り付けられていることがわかります．
3. 同様に，各小立方体はその左の立方体と同一である：このことから，左右の面が普通に貼り付けられていることがわかります．

もし1/4回転多様体の内部風景の着色図解に同じ推論を当てはめると，立方体の上下面は1/4回転して貼り付けられていることが「再発見」できます．

演習問題 7.4．記号で指示されている通りに図7.10を着色せよ．この風景を作るには，図7.6の（大きい）立方体をどのように貼り付ければよいか？　もう少し練習するために，図7.11，7.12を着色し，どういう貼り付け方をすれば，これらの風景になるか定めよ．（これら3つの多様体はすべて「円上のクラインの壺の束」として知られているものの例として第17章，18章で重要になる．）□

演習問題 7.5．演算問題7.3と7.4の多様体のうち，どれが向き付け可能で，どれが向き付け不能か？（向き付け可能性を決定するためには，立方体の面を横切ると反対の面から鏡像状態で戻れるかどうかを検討しなければならないことを思いおこせ．）□

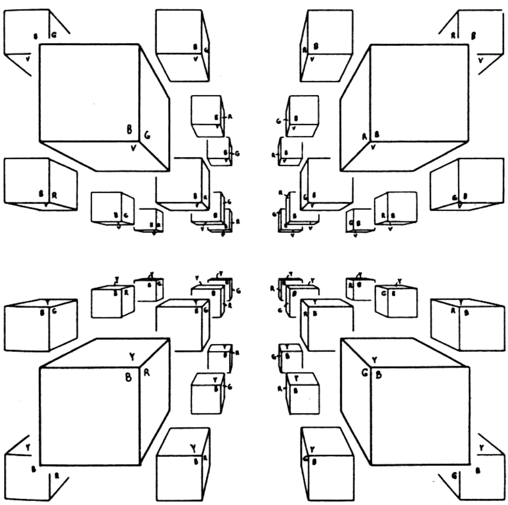


図 7.10：大きい立方体をどう貼り付けると，この風景になるか？

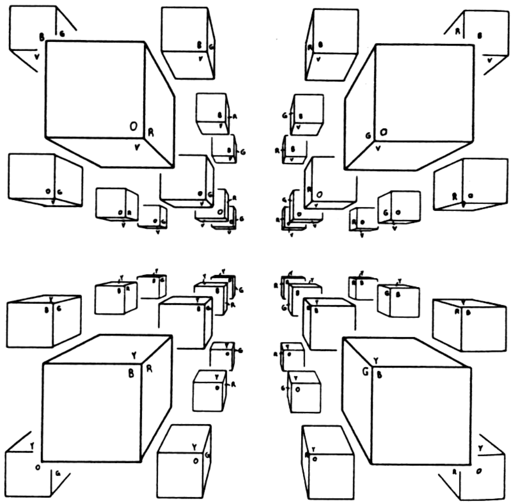


図 7.11：大きい立方体をどう貼り付けると，この風景になるか？

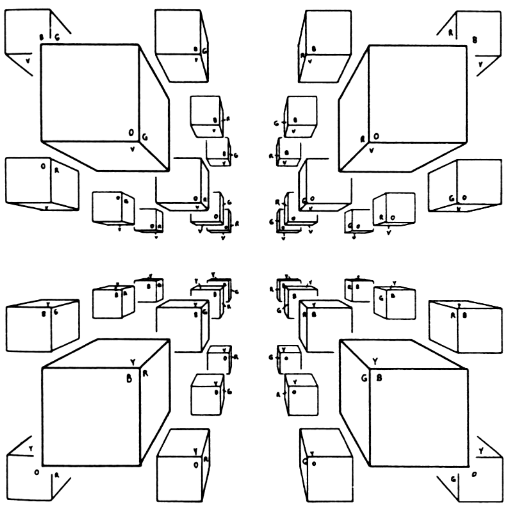


図 7.12：大きい立方体をどう貼り付けると，この風景になるか？

立方体からできたこれらの3-多様体に関して注意を2つ述べておきましょう．まず第1に，各々は通常の3次元ユークリッド空間の局所幾何をもっています．言い換えれば，各々は平坦なのです．次に，もし思いがけず，あなたがこれらの多様体の1つ——しかし，どの多様体かはわからない——に居たとすれば，右手を挙げることで向き付け可能性を簡単に検討できるでしょう．もし，他のすべてのあなたの写(コピー)しが右手を挙げているならば，その多様体は向き付け可能であるとわかるし，もし，そのどれかが左手を挙げているならば，向き付け不能だとわかるでしょう．もう少し詳しく観察すれば，（演習問題7.4のように，今度はあなた自身が着色された立方体になって）多様体の性質を正確に見定めることができます．

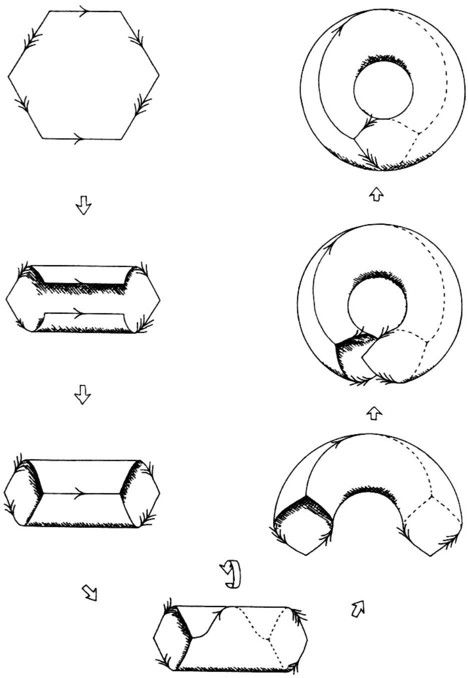


図7.13：六角形の相対する縁を物理的に貼り付けるためには，六角形をドーナツ曲面の形に変形しなければならない．したがって，抽象的に貼り付けられた縁をもつ六角形はトーラスと同じ大域位相をもつ．

すべての3-多様体が立方体からできているわけではありませんし，また，すべての曲面が正方形からできているわけでもありません．例えば，相対する縁が抽象的に貼り付けられている正六角形を考えます．この六角形を変形したいならば，3次元空間において貼り付けを物理的に行なうことができます(図7.13)．このとき，この曲面がトーラスと同じ大域位相をもつことがわかるでしょう．その曲面は六角形から作られ，トーラスの位相をもつので，**六角形トーラス**と呼ぶことにします．六角形は平坦なので，その局所幾何は平坦です．(幾何学的には，六角形トーラスはドーナツ曲面としてよりはむしろ抽象的に貼り付けられた縁をもつ六角形として考えるべきです．)

演習問題7.6．六角形トーラスで飛び廻る複葉機パイロットを想像せよ．六角形トーラスがパイロットにどのように見えるかを示す図7.3に似た絵を描け．もう1機の複葉機が共に飛ぶと，どうなるか？ □

大体において，六角形トーラスは通常の平坦なトーラスにとてもよく似ています．しかしながら，異なるところは，その六角形の6つの隅すべてが1点になるように貼り付けられてはいないということです．図7.13を図3.3と比べて下さい．図3.3では正方形の4つの隅すべてが曲面の1点で合うのですが，図7.13では，六角形の6つの隅がそれぞれ3つの隅からなる2つのグループで合っています．

後で，多角形の隅はどのように合うか知るのが大切になります．多くの場合，3次元空間で貼り付けを物理的に行なうことができないでしょう．幸い，単に多角形自体を研究することで，どのように隅が合うかを常に言うことができます．例えば，正方形の4つの隅が合う点の廻りを歩こうとする通常の平坦なトーラス上のFlatland人を想像しましょう．(内在的には，彼はそういう点の位置を突き止めることは決してできないでしょうが，議論のために，丁度その点のあたりを散歩しているとしましょう．)図7.14の下の絵は無視して，上の絵でこの進行を辿ります．彼は正方形の下右隅より出発します．正

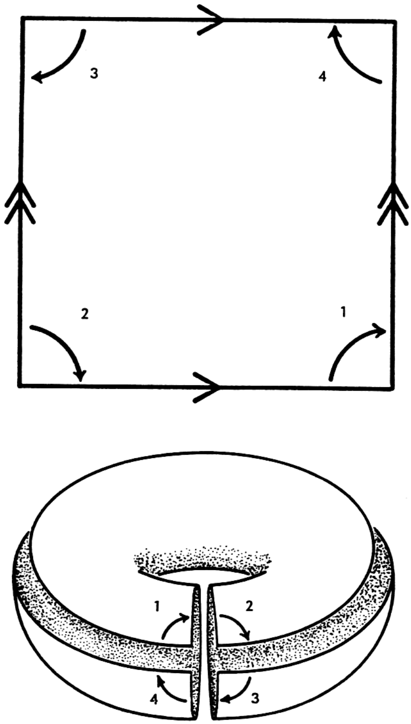


図 7.14：小さな円上を歩く Flatland 人は 4 隅すべてを訪ねることができる．

方形の右端を横切って，下左隅に行きます．そこから下端を横切って，上左隅に行き，そこから左端を横切り，上右隅に，そして最後に上端を横切って家に帰り着きます．正方形で彼の進行を辿ることによって，我々はすべての 4 つの隅が 1 点で合うことが推論できました．それと対照的に，六角形トーラスで散歩に出る Flatland 人は出発した場所に応じて，家に帰り着く前に隅 1,2,3 か隅 a,b,c のいずれか 3 個の隅を訪ねることになります（図7.15を参照）．さて，この「隅の廻りを歩く」方法を用いて新しい曲面を研究してみましょう．図7.16（注意：*2 対*の辺いずれも裏返して貼り付けられている）の矢印によって指示されている通りに辺が貼り付けられている正方形を考えま

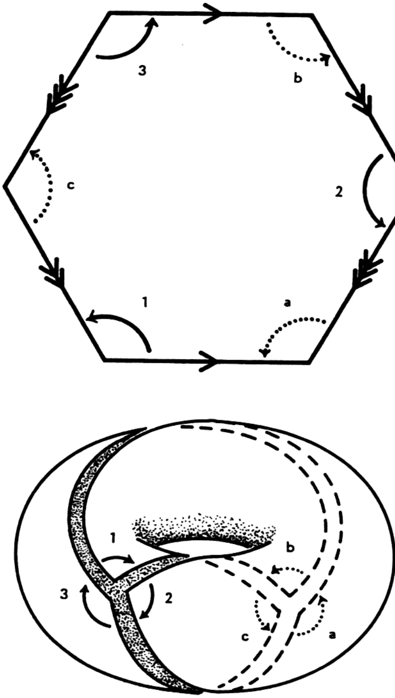


図 7.15：小さな円を歩く Flatland 人は 3 個の隅からなる 1 つのグループを訪ねる.

す. 下右隅より出発した Flatland 人は右端を横切って上左隅に進みます. そこから彼は上端を横切って家に帰り着きます. 同じように, 下左隅より出発した Flatland 人は, 上右隅に行き, 家へ戻ります. これにより正方形の隅はそれぞれ 2 個の隅からなる 2 つのグループで合うことがわかります. しかし, ここで何かおかしなことが起こっています. つまり, 2 個の隅はうまく合わないのです！図7.17は, 2 個の90°の隅が合うと「錐点」が得られることを示しています. 一般に, 1 点における角の和が360°未満のときはいつでも錐点が得られるのです.

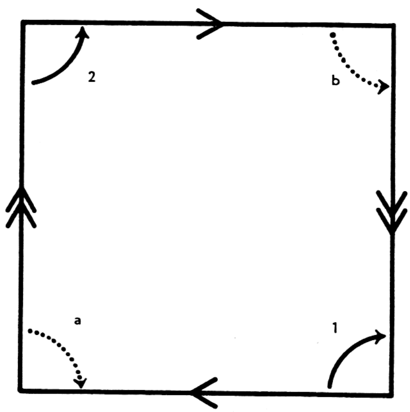


図 7.16：相対する各辺を裏返して貼り付ける．小さな円を歩く Flatland 人は 2 個の隅を訪れることができるだけである．

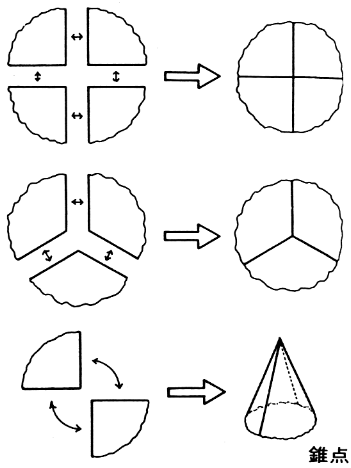


図 7.17：もし角の和が360°未満ならば「錐点」を得る．

演習問題 7.7. 図7.18は，それぞれ矢印によって指示されているように辺を貼り付けた六角形である 3 枚の曲面を示している．上で述べた「隅を歩く」方法を用いて，各六角形の隅がどのように合うか定めよ．これらの曲面のう

ち，どれが錐点をもつか？ □

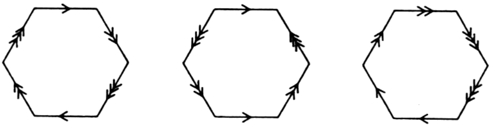


図 7.18：これらの曲面のうち，どれが錐点をもつか？

演習問題 7.8．前の演習問題のうち，どの曲面が向き付け可能か？ □

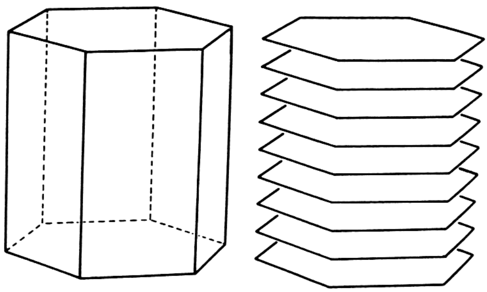
演習問題 7.9．図7.18の第 2 の曲面について複葉機パイロットの印象を示すような図7.3に似た図を描け． □

演習問題 7.10．六角形トーラスと通常の平坦なトーラスは同じ局所位相をもつか？同じ局所幾何をもつか？同じ大域位相をもつか？同じ大域幾何をもつか？ □

ここで定義上の問題をはっきりさせておきたいと思います．曲面が**平坦な幾何をもつ**というときは，その局所幾何はすべての点で平坦（すなわち，ユークリッド的）であることを意味します．錐点は許されません．例えば，図 7.16 で定義された曲面は，2 点を除きすべての点で平坦な局所幾何をもっても，平坦であることは考えられません．それに比べて，六角形トーラスは，例外なくすべての点で平坦な局所幾何をもつので，平坦であると考えられます．

演習問題 7.11．演習問題7.7のどの曲面が平坦か？ □

この章での残りの３-多様体は図7.19(a)に示すような六角形プリズムから作ります．このプリズムの相対する側面を貼り付けると，それぞれの水平の層（図7.19(b)を参照）は六角形トーラスになり，六角形トーラス×区間が得られます．次に，このプリズムの下面を上面に貼り付けると，得られるのは　六角形トーラス×円　であり，これは３次元トーラスの新しい形です．これを**六角形３-トーラス**と言います．



(a)　基本のプリズム　(b)　六角形×区間と考えたプリズム

図7.19：六角形プリズムは３-多様体を構成するのに役立つ．

演習問題7.12． 六角形３-トーラスと通常の３-トーラスは同じ局所幾何をもつか？同じ大域位相をもつか？同じ大域幾何をもつか？六角形３-トーラスの内部に居る自分を想像すると，自分自身のコピーが見える．それらはどのように並んでいるか？ □

演習問題7.13． 六角形プリズムを用いて演習問題7.3の1/4回転多様体に似た「1/3回転多様体」と「1/6回転多様体」を構成せよ．もし，これらの多様体の１つに住んでいるとすれば，あなた自身の他の写し（コピー）はどのように並んでいるであろうか？ □

一見したところ，六角形３-トーラスと通常の３-トーラスは位相的に同じ

である（すなわち，同じ大域位相をもつ）ようには全然見えません．同様に，第５章で，$P^2\#P^2\#P^2$ と $T^2\#P^2$ が同じであると理解するのは努力のいることでした．このことより，他の一見異なっているように見える多様体も位相的には同じかもしれないという疑いが残ります．今世紀に変る頃，数学者達はこの問題を扱う種々な方法を考え出しました．例えば Euler 数（第12章）は２枚の曲面が位相的に同じであるか否かを最終的に決定することができます．３-多様体のためには，もっと複雑な方法，例えば「ホモロジー群」と「基本群」（Armstrong：Basic Topology の第５，8章，あるいは，他の代数的位相幾何学の本を参照）が必要になります．幸いなことに，実際に異なるように見える多様体は大抵異なっているのです．

8

向き付け可能性 対 両側性

メービウスの帯は向き付け不能です．その上，図8.1のメービウスの帯には，エッシャーの蟻が証明しているように，ただ1つの側しかありません．一般に，3-多様体にある曲面は，（3次元の！）蟻がその上をずっと歩き，出発した曲面の反対側に戻れるならば，**単側**と呼ばれます．向き付け不能性と単側性はしばしば同じ性質のまさに2つの様相であると想像されていますが，演習問題8.1の例からわかるように，実はそうではありません．

（3-多様体における）単側ではない曲面は，**両側**と呼ばれます．というのは，この場合には，曲面は2つの別々の側をもち，その曲面を歩いている（3次元の）蟻は決して一方の側から他方の側へは行けないからです．

演習問題 8.1． 図8.2は立方体の相対する面を貼り付けて3-多様体を構成する4つの方法を示している．それぞれの場合，立方体には貼り付けると3-多様体における曲面を形成する正方形が含まれている．それぞれの例について，その曲面を確認し，それが向き付け可能か不能か，また単側か両側かを述べよ．向き付け可能性を決定するには（2次元の）Flatland人がその曲面を歩いて鏡像状態で出発点に戻れるかどうかを検討しなくてはならない．「側性」

脚注：本章はそのようなものがそもそもあるとは思ってもいなかったときに，両側メービウスの帯を示してくれたBob Messerに捧げるものである．

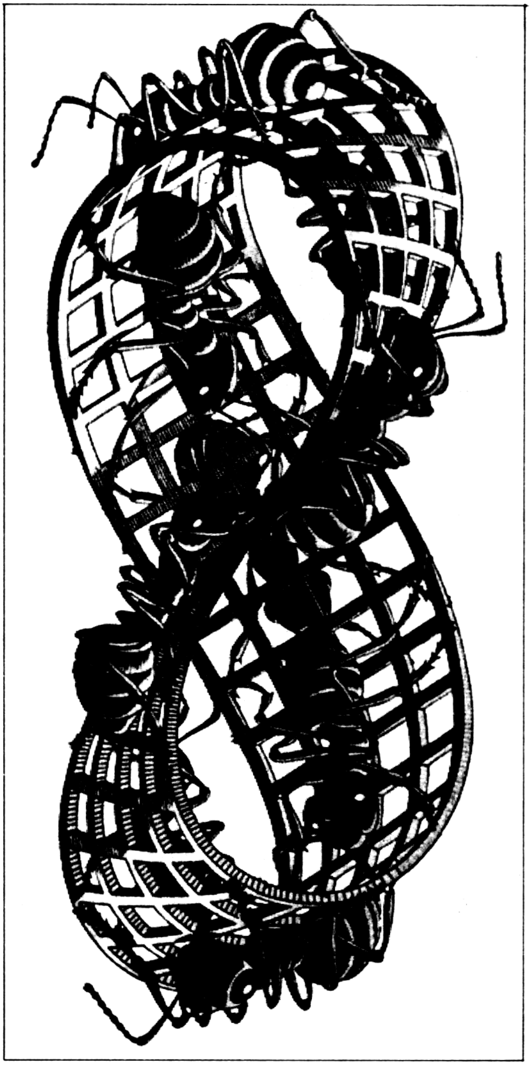
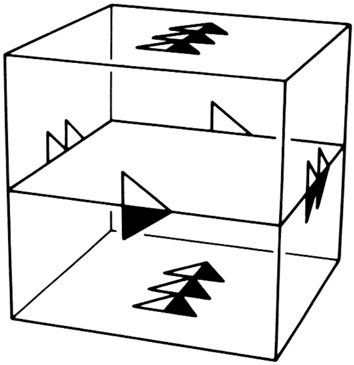


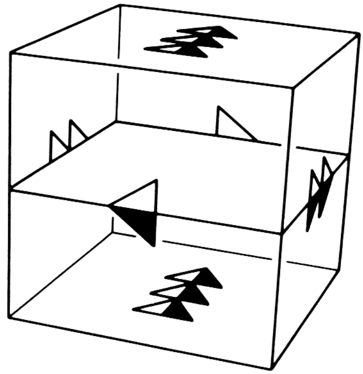
図8.1：エッシャーの蟻は，メービウスの帯にはただ1つの側しかないことを証明する．

(*Möbius Strip II* by M.C. Escher, copyright ©
Beeldrecht, Amsterdam/VAGA, New York. Collection Haags
Gemeentemuseum—The Hague. 1985.)

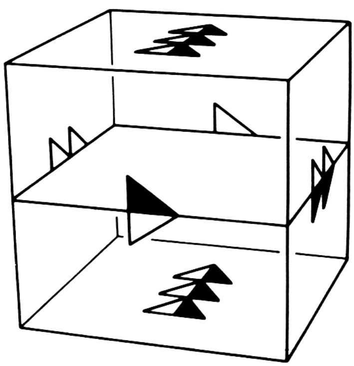
を決定するには，（3次元の）蟻がその曲面の上を歩き，その曲面の反対側の出発点に戻れるかどうかを検討しなくてはならない．



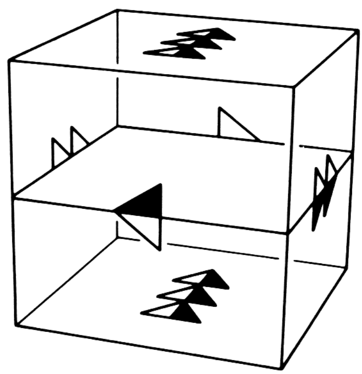
(1)通常の通り，相対する面を貼り付けて3-トーラスを構成する．



(2) 通常の通り，上面と下面，左の面と右の面を貼り付けるが，前面と後面は左右を逆にして貼り付ける．この3-多様体は $K^2 \times S^1$ である．



(3) 通常の通り，上面と下面，左の面と右の面を貼り付けるが，上下を逆にして前面と後面を貼り付ける．この3-多様体も $K^2 \times S^1$ である．



(4) 通常の通り，上面と下面，左の面と右の面を貼り付けるが，左右を逆にし，かつ上下を逆にして前面と後面を貼り付ける．2つの裏返しは合成すると180°の回転と同じである．この多様体は演習問題7.3の半回転多様体である．

図8.2：それぞれ1つの曲面を含んでいる4つの3-多様体

この 4 つの例を用いて，次の表を満たせ．

	向き付け可能	向き付け不能
単側		
両側		

演習問題 8.2. 側性は曲面の内在的性質か，あるいは外来的性質か？向き付け可能性についてはどうか？すべてのクラインの壺は向き付け不能か？それらはすべて単側か？ □

演習問題 8.3. 両側のメービウスの帯を含む 3 -多様体を構成せよ．ちょっと戯れに，そのメービウスの帯の片側に赤い蟻を他の側に黒い蟻を描け．赤い蟻と黒い蟻は（少なくともメービウスの帯の縁を這い渡らなければ）決して出会わないことに注意せよ． □

向き付け不能性と単側性が 1 つの性質の異なった様相であるという最初の印象は全く根拠がないわけではありません．*向き付け可能な 3 -多様体においては*，両側曲面はすべて向き付け可能で，単側曲面はすべて向き付け不能です．その理由を見るために，向き付け可能な 3 -多様体にある曲面の上にあなたが友人と立っているとしましょう．その友人は散歩に出かけることにします．あなた方は向き付け可能な 3 -多様体にいるので，彼が鏡像状態で戻る

ことはとうていありえないことがあなたにはわかっています．あなたの立っている曲面は単側で，あなたの立っている反対の側に散歩から友人は戻ると差し当たり仮定しましょう．また，その面は透明で，透かして友人の足元が見えると仮定しましょう．（この多様体では，その曲面に向かって重力が働くので，あなた方のどちらも落下はしません！）友人はその曲面のもう１つの側にいるので，足跡が鏡像状態に見えます（図8.3）．もしあなたが（３次元の身体は無視して）彼の足跡のみを調べれば，足跡はその曲面の向き付けを逆にする道を辿っているのがわかるでしょう．したがって，この単側曲面は向き付け不能なのです．



図 8.3：向き付け可能な３‐多様体にある単側曲面を散歩に行く．散歩の終りに，友人は鏡像状態にはなっていない．しかし，彼はその曲面のもう一方の側に立っているので，足跡があなたには鏡像状態に見える．

一方，もしその曲面が両側であれば，その友人は出発した曲面の同じ側を散歩から戻って来るでしょう．この３‐多様体は向き付け可能ですから，彼は鏡像というよりは，むしろ正常な状態のままでしょう．特に，足跡は鏡像状態ではないでしょう．これは彼がどこを歩こうと，その足跡は決してその曲面の向き付けを逆にする道を辿らないということを示しています．言い換えると，この両側曲面は向き付け可能なのです．

第II部　曲面上の幾何

9

球面

Flatland の物語続篇で，Puncto 氏という名の八角形が，かなり大きな三角形をいくつか調査し，いずれの三角形も角の和が180°よりも少し大きいということを見つけています！　この発見に Puncto 氏は心踊り，そのデータを２度検討して，この発見を公表します．残念なことに，市当局も研究機関もこの興奮を共にしてはくれません．人々は彼が測定の誤まりを説明するための弁解をでっち上げているにすぎないと疑い，彼は解雇されてしまいます．我々には間もなくわかることですが，Flatland 人は平面にではなく，球面上に住んでおり，その球面上では，三角形の角の和は事実180°より大きいというのが正しい説明なのです．この出来事と更にもっと多くのことが Dionys Burger の著書 Sphereland に書かれています．本書のすべての読者に Sphereland を心から勧めます（ただ，初めにある Flatland に関するやや退屈な要約に意欲を失わないで下さい）．

球面上に描かれた三角形は**球面三角形**と呼ばれます．球面三角形の各辺は測地線であることが要求されます．すなわち，球面上の Flatland 人が左にも右にも曲がっていないと認めるという意味で，それは内在的にまっ直ぐであることが要求されます．このように，球面三角形の辺はいわゆる大円の弧なのです（図9.1参照）．

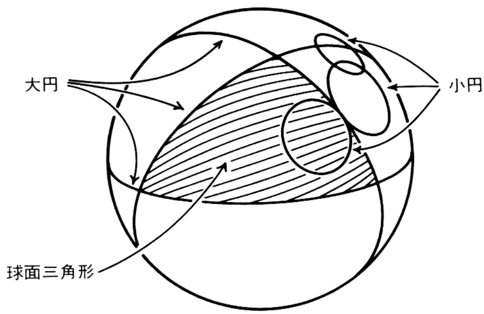


図 9.1：いかなる球面上でも，大円は可能な限り大きい円である．球面上の Flatland 人には大円は直線に見える．それに対して，それより小さい円はどちらかに曲がっているように見える．

今後は，角と面積の比較をより易しくするために，すべての角をラジアンで測ります(なぜ，また，どうしてこうするのかすぐわかります)．π ラジアン＝180°，$\pi/2$ ラジアン＝90° 等を思い出して下さい．特に断らなければ，以下すべての球面は単位球面，すなわち，それらはすべて半径 1 であると仮定します．

演習問題 9.1．図 9.2の各球面三角形について，ラジアンで(1)角の和，(2)面積 を計算せよ．面積の計算をするには，単位球面が面積 4π をもつという事実を用いよ．例えば，図の最初の三角形は球面の1/8を占めるので，その面積は $(4\pi)/8=\pi/2$ となる．

球面三角形の角の和をその面積に関係付ける公式を求めよ．この公式は Albert Girard の著書 Invention nouvelle en L'Algebre (1629) の De la mesure de la superfice des triangles et polygones sphericques, nouvellement inventee Par Albert Girard という節にある．次章で，この公式が明らかになるが，読み進む前に，その公式を求めてみよ．□

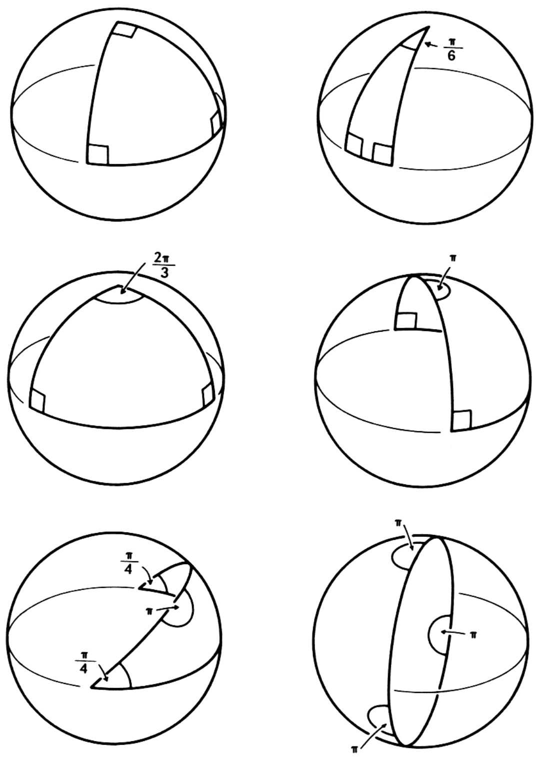


図 9.2：いくつかの球面三角形の分類．この三角形のうち 3 個は，π に等しい複数個の角をもつという意味で「退化」している．最後の三角形は全半球を占め，その 3 辺すべてが同じ大円上にある．

演習問題 9.2．ラジアンでその角が $\pi/2$，$\pi/3$，$\pi/4$ である球面三角形の面積を求めよ．61°，62°，63°の角をもつ球面三角形の面積はどうか？ □

上で求めた公式を是が非でも証明する必要はないとはいえ，単純で美しい公式ですから，とにかくその証明をしておきたいのです．（しかしながら，これは自分で偶然見つけ出せるようなものではありません．著者自身，その公式が全く証明できなくて何時間も努力しました．）

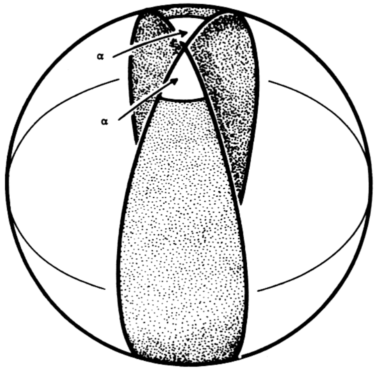


図 9.3：角 α をもつ弓形二角形

最初に，我々は「弓形二角形」の面積の計算法を求めなければなりません．**弓形二角形**とは，図9.3に示されるような 2 つの大円に囲まれた球面上の領域です．角 α のとりうる最大値は π であり，そのとき弓形二角形は全球面を占めます．ですから，例えば，もし α が $\pi/3$ ならば，$\pi/3$ は可能な最大の角 π の 1/3 なので，弓形二角形は球面全体の1/3の面積を占める，すなわち，$(1/3)(4\pi)=4\pi/3$ と推論できます．同じ推論を用いて，角 α をもつ弓形二角形の面積は $(\alpha/\pi)(4\pi)=4\alpha$ となります．この公式をいくつかの特別な場合，例えば $\alpha=\pi/2$ あるいは $\alpha=\pi$ で検討してみて下さい．

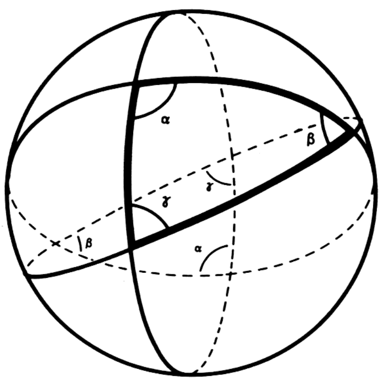


図 9.4：球面三角形の辺を延長すると，その結果できる大円は球面の裏側に「対心三角形」を形成する．

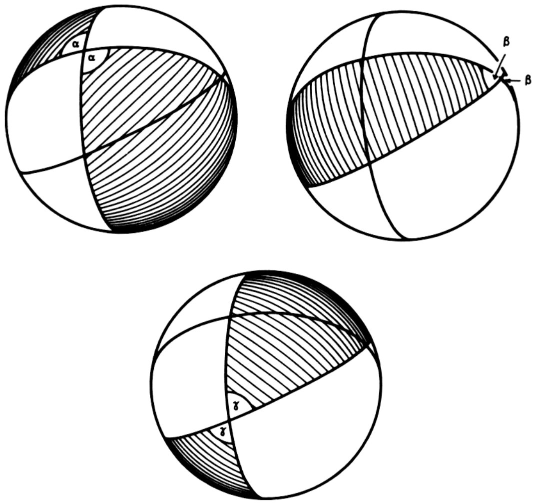


図 9.5：弓形二角形に影をつける 3 つの方法.

さて，角 α, β, γ をもつ球面三角形の面積の公式を求めましょう．まず球面上に三角形の辺をずっと延長して，図 9.4に示されるような 3 つの大円を構成します．元のものと同一な「対心三角形」がこの球面の裏側に形成されます．図9.5は弓形二角形に影を付ける 3 通りの方法を示しています．これら弓形二角形は，それぞれ角 α, β, γ をもち，したがって，その面積は $4\alpha, 4\beta, 4\gamma$ です．

さて，3 つのすべての弓形二角形に同時に影を付けるとどうなるか見てみなさい（図9.6）．球面のあらゆる部分が少くとも 1 度は影になり，元の三角形と対心三角形のそれぞれが 3 度（それぞれの弓形二角形は 1 度）影になります．したがって……

$$\begin{pmatrix}\text{最初の}\\\text{弓形二角形}\\\text{の面積}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{2 番目の}\\\text{弓形二角形}\\\text{の面積}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{3 番目の}\\\text{弓形二角形}\\\text{の面積}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\text{全球面}\\\text{の面積}\end{pmatrix}}_{\text{すべて 1 度だけ影をつけられる}}+2\underbrace{\begin{pmatrix}\text{元の三角形}\\\text{の面積}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\text{対心三}\\\text{角形の}\\\text{面積}\end{pmatrix}}_{\text{各三角形も 2 度影をつけられている}}$$

$$4\alpha+4\beta+4\gamma=4\pi+2A+2A$$
$$4(\alpha+\beta+\gamma)=4(\pi+A)$$
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+A$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)-\pi=A$$

これが証明したかったものです！ 言葉で表わすと「球面三角形の角の和は三角形の面積に等しい量だけ π を越える」という公式になります．

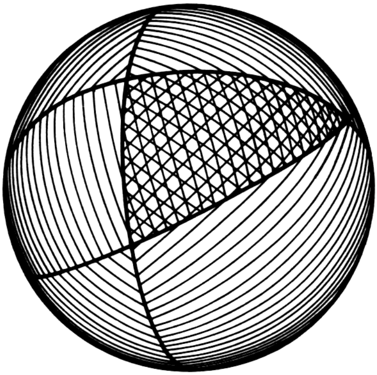


図 9.6： 3 つのすべての弓形二角形に同時に影を付けるとどうなるのか見てみよ．

演習問題 9.3．公式 $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi=A$ は半径 1 の球面上の三角形のみに適用される．半径 2 の球面上の三角形に適用するには，この公式をどのように修正しなくてはならないか？ 半径 3 についてはどうか？ 半径 r の球面上の三角形に対する一般公式を求めよ．□

演習問題 9.4．Flatland 人の社会は半径が丁度 1000m である球面上にある．ある農夫は全くまっ直ぐな辺（すなわち，測地線）と，注意深く測定した 43.624°，85.123°，51.270° の角をもつ三角形の畑を所有しているとする．この畑の面積を求めよ．忘れずに角をラジアンに変えること．(ボーナス質問：どれ位正確にこの畑の面積がわかるか？ プラス・マイナス何パーセント位の誤差か？）□

演習問題 9.5. Flatland 人の社会は球面上にある．彼等は注意深く三角形を測定し，その角が 60.0013°，60.0007°，60.0011° であり，一方，その面積は 5410.52m² であることがわかった．球面全体の面積はいくらか？ □

演習問題 9.6. 次の球面三角形のそれぞれの角の和を概算せよ．ヒント：まず各三角形によって囲まれた面積を概算し，演習問題 9.3 の公式に当てはめよ．三角形の面積を推測しなければならないから，正確ではなく，ただの近似値が得られるだけである．地球の半径は約 6400km である．

1. プロビデンス，ニューポート，ウエスタリー（ロードアイランド）でできた三角形．これらの都市は約50km 離れている．
2. ヒューストン，エル・パソ，アマリロ（テキサス）でできた三角形．これらの都市は約1000km 離れている．
3. インドのマドラス，東京，ロシアのサンクト・ペテルブルグでできた三角形．これらの都市は約7000km 離れている．□

上で我々は，球面の幾何が平面の幾何とは異なる最初の重要な点を見てきたところです．すなわち，球面三角形の角の和は，三角形の面積に比例する量だけ π を越えます．ところが，ユークリッド（＝平坦な）三角形の角の和は正確に π です（この最後の事実の証明には図 9.7 を考えてみて下さい）．

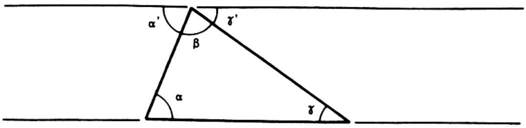


図 9.7：ユークリッド三角形の角の和は π であることの簡単な証明：(1) $\alpha'+\beta+\gamma'=\pi$，(2) $\alpha=\alpha'$，(3) $\gamma=\gamma'$，したがって，(4) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$．

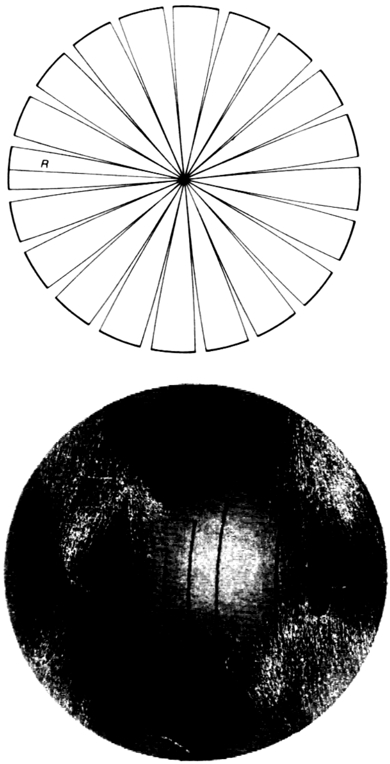


図 9.8：平たくすると球面は裂けて広がる．

平面上に平たく伸ばすと，球面は裂けて開きます（図9.8）．これは，球面上の円は平面上の同じ半径の円より小さい円周をもち，より少ない面積を囲むことを示しています．球面上の円の半径は——Flatland 人が測定するように——球面上に沿って測定されるということを強調しておきます．図 9.9は，球面上では，(内在的に測定して)たとえ円の半径が増加し続けても，円の円周は事実上縮むことがありうることを示しています．

演習問題 9.7. （*復習問題*）他のどんな曲面が球面の局所幾何をもつか？　また，そのような他の曲面に住む Flatland 人には，自分達が球面上にいないことがわかるであろうか？　□

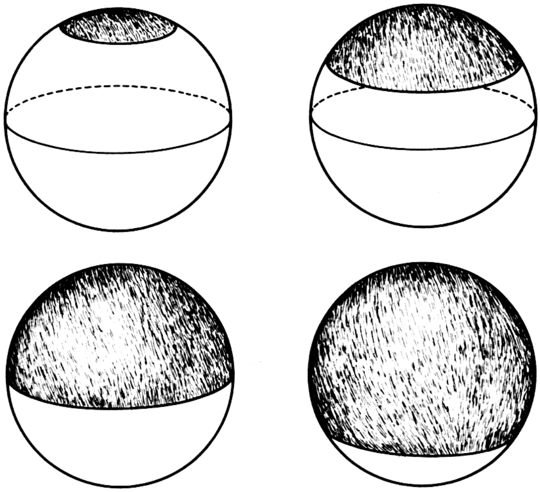


図 9.9：円周は最初は増加するが，円がいったん赤道を通過すれば減少する．

10

双曲平面

図10.1で図解されているように，３種類の２次元等質幾何があります．そのうち２つはすでに見慣れています．図の第１の幾何は球面の見慣れている幾何です．この幾何はしばしば**楕円幾何**と呼ばれるもので，**正の曲率**をもつといわれます．第２の幾何は見慣れているユークリッド平面の幾何です．これは**ユークリッド幾何**と呼ばれ，**零曲率**をもつといわれます．図の第３の幾何は大ざっぱに言って鞍状の幾何です．これは楕円幾何あるいはユークリッド幾何ほど見慣れていませんが，その重要性に変わりはありません．これは**双曲幾何**と呼ばれ，**負の曲率**をもつといわれます．*双曲平面*（H^2 と略記する）とは，いたるところで双曲幾何（＝一定の負の曲率）をもつ無限の平面のことで，これは丁度ユークリッド平面がいたるところでユークリッド幾何（＝零曲率）をもつ無限の平面であるのと同じなのです．ところで，いたるところで楕円幾何（＝一定の正の曲率）をもつ無限の平面はありえないというのは自然の事実なのです．それは必ず，球面あるいは射影平面を形成するように，自らに閉じています．

鞍状の形は双曲平面の局所的な良い図を与えてくれますが，もっと大きな規模で，双曲平面がどのようなものか伝えてくれません．双曲平面のもっと大規模な性質の感じをつかむために，演習問題10.1に説明されているような双曲平面の紙を自分で作ってごらんなさい．双曲平面の紙を扱ってみると，

言葉や絵では無理なことがよく理解できます．

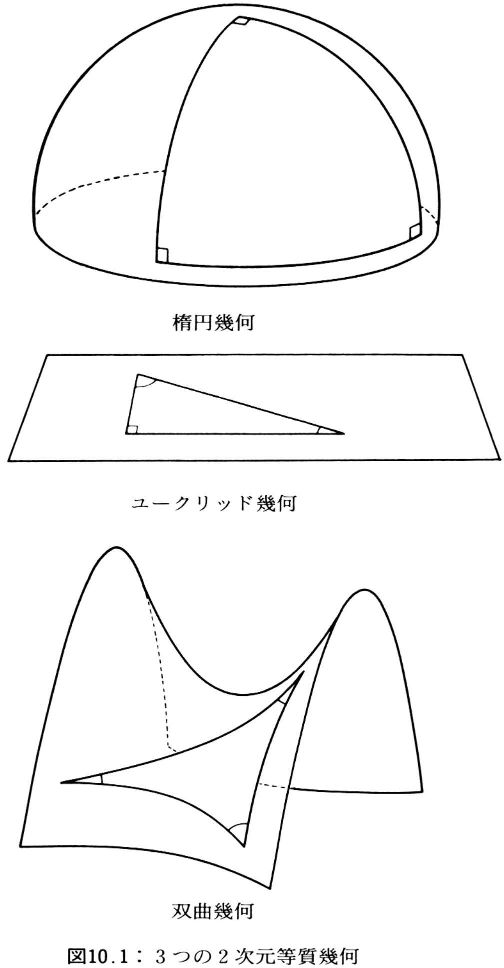


図10.1： 3つの2次元等質幾何

演習問題10.1．*双曲平面の紙の作り方*（このアイディアはBill Thurstonによる）．これには沢山の（少なくとも100枚位の）二等辺三角形が必要である．それを作る最も効率のよい方法は，図10.3のコピーを何枚か作ることである．図10.2の影を付けた7枚の三角形のように，7枚の三角形をテープで接着し，

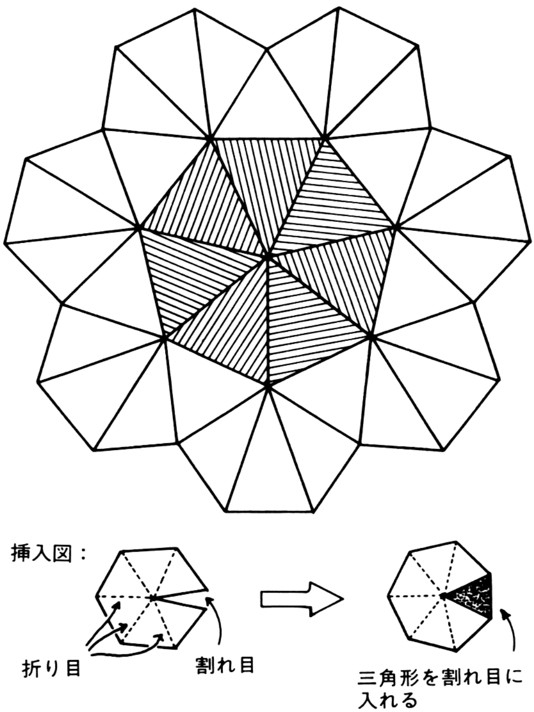


図10.2：（演習問題10.1を参照）７枚の三角形の各頂点で合うように，二等辺三角形をテープで貼り付ける．上の挿絵がその方法を示す．

それから元の図形の各頂点が７枚の三角形に囲まれるように，この図形に更に多くの三角形を貼り付けることである．このようにして気がすむまで続ける．得られた曲面はヘナヘナしているが，これが正確な形である．曲面が大きくなればなるほど，ますますヘナヘナとし，かつより正確になる．すべての頂点が丁度７枚の三角形で囲まれている限り失敗はありえない．作成上のヒント：三角形を切り離して，もう１度テープで貼るようなことはしないように！　例えば，別々の７枚の三角形で始めるよりは，図10.2の下の挿絵に示されているように，折り目を付けて切り開いた間に１枚の三角形を挿入するようにして始めればよい．□

演習問題10.2. 各頂点に７枚ではなく５枚の二等辺三角形をテープで貼り付けるとどうなるか，やってみよ！　□

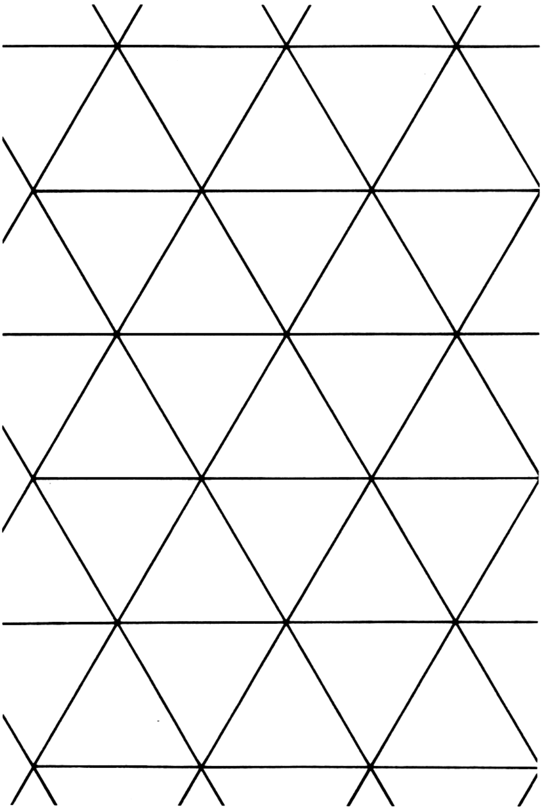


図10.3

あなたの作った双曲平面の縁に近い部分は，中心に近い部分と区別できないことに注意して下さい．これは双曲平面が等質であることを示しています．

楕円幾何と双曲幾何は対照的な性質をもつ傾向があり，ユークリッド幾何はその２つの間の境界線としての役目を果す傾向があります．球面は平らに

すると裂けて開くことを思いおこして下さい（図9.8）．それと比べて，双曲平面は，平らにすると，しわがより，重なり合います（図10.4）．

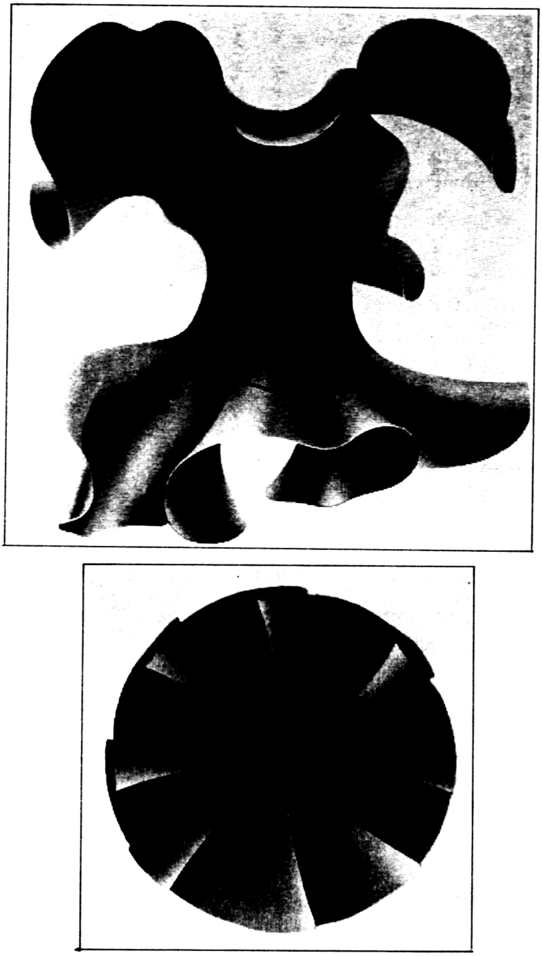


図10.4：双曲平面の片は，しわがより重なり合う．

我々にとってもっと大切なことは角の問題です．楕円幾何では，三角形の

角の和は π ラジアン(180°)より大きくなります；半径1の球面上では，角は三角形の面積に丁度等しい量だけ π より大きくなります〔$(\alpha+\beta+\gamma)-\pi=A$〕. 双曲幾何では，三角形の角の和は π ラジアンより小さくなります；標準双曲平面では，角は三角形の面積に丁度等しい量だけ π より小さくなります〔$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=A$〕.（しかし，$(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ が与えられた三角形の面積に比例するが等しくないようなより小さい，あるいは，より大きい球面が存在するように，$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ が三角形の面積に比例するが等しくないような「より大きい」あるいは，「より小さい」双曲平面が存在しうるのです．本書では，特に断わらない限り，「球面」とは $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi=A$ の成り立つ半径1の球面を意味し，「双曲平面」とは $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=A$ の成り立つ標準双曲平面を意味することにします.）次章において，なぜ我々が角にそれほど関心をもつのかわかるでしょう.

演習問題10.3. 双曲平面で，角が $\pi/3, \pi/4, \pi/6$ となる三角形の面積は何か？

□

双曲平面のどんな三角形も π より大きい面積をもたないことは興味をそそる事実です．三角形の辺が長くなるにつれて，その角は尖っていきますが，辺が無限に長く，角がゼロに近づいても，その面積は決して π を越えません．これは公式 $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=A$ と矛盾しません．この現象については第15章で更に述べることにします.

11

曲面上の幾何

図11.1の左側にあるのは演習問題7.7で学んだ3枚の曲面です．第1の図は，六角形の隅がただ2個の隅からなるグループで貼り合わされているので，

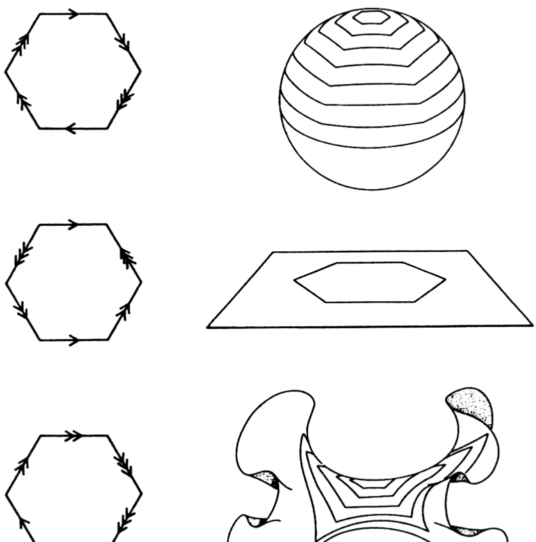


図11.1：あらゆる曲面に等質幾何が与えられる．

錐点をもっています．第２の図は，六角形の隅が３個の隅からなるグループで貼り合わされているので，錐点のない平坦な幾何をもっています．第３の図は六角形の６個すべての隅が１点で貼り合わされているので，逆錐点をもっています．（これらのことを演習問題 7.7の前にある節で復習してみるのもいいでしょう．特に図 7.17を参照して下さい．）

錐点も逆錐点も球面と双曲平面の特殊な性質を用いて取り除くことができます．例えば，球面上では（より大きい三角形がより大きい角をもつように）より大きい六角形はより大きい角をもちます．ですから，第１の例で錐点を取り除くには六角形を球面上に置き，単にそれを大きくすればその角は十分に大きくなって終に錐点が消えます．これは，それぞれの角が180°で六角形が半球面すべてを充たす場合に起こります．錐点を取り除く過程で，その曲面に等質な楕円幾何が与えられています．（ところで，あなたはこの曲面が何かわかりますか？）

最後の例で逆錐点を取り除くには，より大きい多角形がより小さな角をもつ双曲平面に六角形を置かねばなりません．もし，この六角形をそれぞれの角が 60°に縮むまで大きくすると，逆錐点は消えます．この過程で，この曲面は等質な双曲幾何が与えられます．

演習問題11.1．図 7.16の曲面には２つの錐点がある．どのようにして，それらを取り除けるか？この曲面はどんな等質な幾何が与えられるか？ところで，これはどんな曲面か？　□

演習問題11.2．第７章の「隅を歩く」方法を用いて，図11.2の各曲面について多角形の隅がどのように合うか，またこの曲面が錐点をもつかどうかを決定せよ．これらの曲面のどれに楕円幾何が与えられるか，どれにユークリッド幾何が与えられるか，どれに双曲幾何が与えられるか？　□

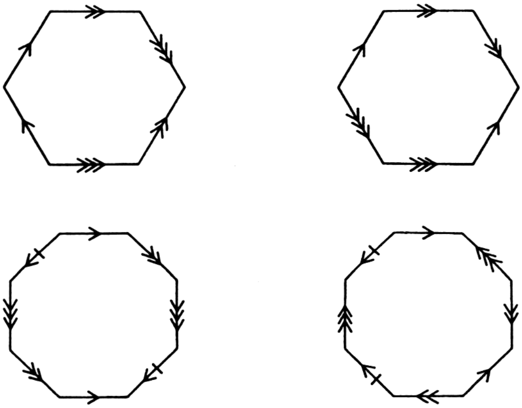


図11.2：これらの各曲面に等質な幾何を求めよ．

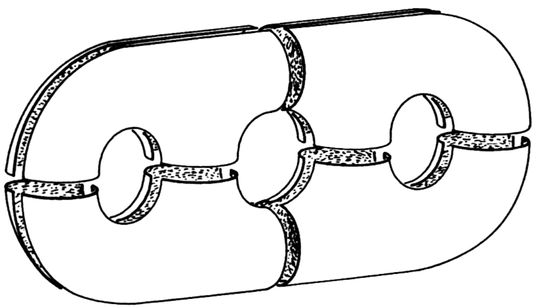


図11.3：3穴ドーナツ曲面は隅が4個からなるグループで合う8個の六角形に分割できる．

あらゆる曲面には，何んらかの等質な幾何が与えられることがわかります．上述の方法を一部修正して，貼り合わされた多角形としての曲面よりむしろ3次元に描かれた曲面に対して等質な幾何を見つけることができます．例えば，3穴ドーナツ曲面のために等質な幾何を見つけたいとします．まず，その曲面を隅が4つからなるグループで合う六角形に切り開きます（図11.3）．（図11.1の左側の六角形のように）それぞれの六角形を正六角形になるように変形します．正六角形の隅の角は120°——それは大きすぎて4個の

隅からなるグループに合わない——なので，各六角形を双曲平面に置き，それを角が 90°に減るまで拡張します．このとき，各六角形は

(1) 等質な双曲幾何，　　(2) 90°の隅の角

をもちます．さて，六角形をもう一度貼り合わせて，その曲面を再構成します．これは，変形もせず，また双曲幾何を壊さずにはできませんので，それらを 3 次元空間で物理的に貼り合わせると想像してはいけません．そのように想像するのではなく，1 つの六角形を離れる Flatland 人が隣りの六角形に再び姿を表わすという抽象的な意味で，それぞれの六角形を前の隣接した六角形に貼り付けるというように想像します．この抽象的に再構成された曲面は元の 3 穴ドーナツ曲面と同じ大域位相をもっています．しかし，局所幾何が不規則に点から点へと変わる元の 3 穴ドーナツ曲面とは異なり，この新しい曲面は双曲平面の等質な局所幾何をもちます．六角形の 90°の隅は 4 個からなるグループとなって完璧に合いますから，錐点は存在しません．

演習問題11.3. 4 穴ドーナツ曲面 ($T^2\#T^2\#T^2\#T^2$) をその隅が 4 個からなるグループで合う六角形に切り開く方法を示す図を描け．2 穴ドーナツ曲面 ($T^2\#T^2$) にも同じことをせよ．n 穴ドーナツ曲面を切り開くと，いくつの六角形が得られるか？ □

少なくとも 2 穴をもつどんなドーナツ曲面も，その隅が 4 個からなるグループで合う六角形に切り開くことができます．したがって，そういう曲面はどんなものでも，この方法を用いて双曲幾何が与えられます．1 穴ドーナツ曲面には双曲幾何は与えられませんが，ユークリッド幾何(平坦なトーラス)が与えられます．零穴ドーナツ曲面，すなわち，球面にも双曲幾何は与えられませんが，その通常の楕円幾何は等質です．上述したように，各曲面は何らかの等質な幾何が与えられるのです．第12章で，いかなる曲面にも複数の等質な幾何は与えられないことがわかります．

演習問題11.4. 2枚の射影平面の連結和は2枚の正方形に切り開くことができる(図11.4)．同様に，$P^2\#P^2\#P^2$ は2枚の六角形に，$P^2\#P^2\#P^2\#P^2$ は2枚の八角形に，…と切り開ける．それぞれの場合，多角形の隅は4個からなるグループで合う．(縁の1つの端の2個の隅は相対する端の2個の隅に貼り付ける．) これらの曲面のどれに，どの等質な幾何が与えられるか？ □

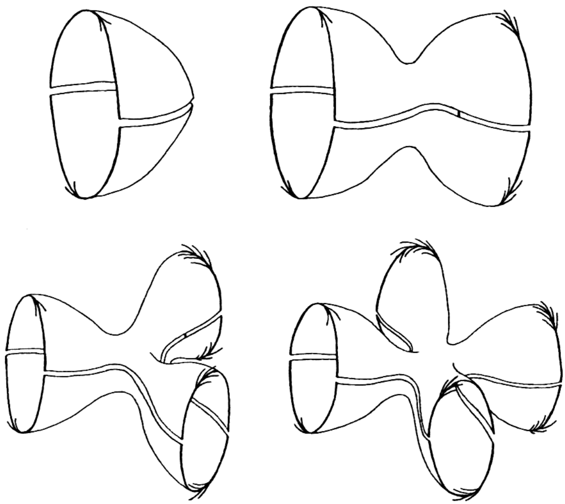


図11.4：n 枚の射影平面の連結和は，その隅が4個からなるグループとなって合う2枚の $2n$ 角形に分割できる．

演習問題11.5. 任意の曲面は，位相的には，次の表の曲面に同値であることを思いおこせ：

S^2	T^2	$T^2\#T^2$	$T^2\#T^2\#T^2$	$T^2\#T^2\#T^2\#T^2$	$\cdots$
	P^2	$P^2\#P^2$	$P^2\#P^2\#P^2$	$P^2\#P^2\#P^2\#P^2$	$\cdots$

向き付け可能性と，どの等質な幾何が与えられるかに従って，上の表の各曲面を図 11.5の表の適当な空欄の中に入れよ．□

	向き付け可能	向き付け不能
楕　円		
ユークリッド		
双　曲		

図11.5

楕円幾何をもつ球面と射影平面，およびユークリッド（平坦な）幾何をもつトーラスとクラインの壺を除くと，あらゆる曲面には双曲幾何が与えられます．ある等質な幾何が曲面に与えられているとき，その曲面はその幾何を「もつ」といいます．このようにして，球面と射影平面は楕円幾何をもち，トーラスとクラインの壺はユークリッド幾何をもち，その他すべての曲面は双曲幾何をもちます．

12

Gauss-Bonnet の公式と Euler 数

あらゆる曲面は，曲面の大域位相についての本質的な情報を含む整数である Euler 数をもちます．Euler 数の計算は簡単で，これにより曲面がどの等質幾何をもつか直ちにわかります．正の Euler 数をもつ曲面は楕円幾何，零の Euler 数をもつ曲面はユークリッド幾何，負の Euler 数をもつ曲面は双曲幾何をもちます．事実，Euler 数はとても有力で，もし曲面の Euler 数がわかり，それが向き付け可能か不能かわかるならば，その曲面がどんな大域位相をもつか直ちに言えるのです！　Gauss-Bonnet の公式は，曲面の Euler 数をその面積と曲率に関連付けます．

Euler 数は胞体分割と呼ばれるもので定義できますから，まず胞体および胞体分割とは何か説明することから始めましょう．0 次元**胞体**とは（通常，**頂点**と呼ばれる）1 点です．1 次元**胞体**とは位相的には(通常，**辺**と呼ばれる)線分です．2 次元**胞体**とは位相的には（通常，何かの表面でなくても**面**と呼ばれる）多角形です．**胞体分割**とは，曲面を胞体に分割するときに得られるものです．それは第11章で用いたような曲面の多角形への分割に似ています（図11.3参照）が，今のところ，我々は面だけでなく頂点と辺にも興味をもっています．

図12.1はいくつかの典型的な胞体分割を示しています．第1のものは6個の頂点，12本の辺，8枚の三角形の面からなる S^2 の胞体分割です．第2のも

のは８個の頂点，16本の辺，６枚の面（中央の２枚の面——上の１枚と下の１枚——は位相的には八角形であり，それぞれの端の２枚は位相的には正方形)からなる $T^2\#T^2$ の胞体分割です．第３のものは T^2 の胞体分割です．そこには，正方形の４隅はただ１点で合うから——４個ではなく——*１個*の頂点があります．(挿入図を見て図3.3を思い出して下さい．）同じように，正方形の４辺が対になって貼り付けられているので，それには２本の辺しかありません．最後に，明らかに，この胞体分割にはただ１枚の面しかありません．図12.1の最後の図は P^2 の胞体分割を示しています．

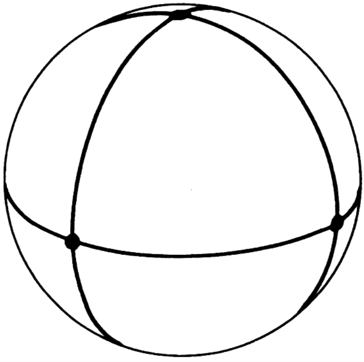
演習問題12.1. 図12.1(d)の P^2 の胞体分割における頂点，辺，面の数を数えよ．注意：円板の円周上の頂点と辺は対にして貼り付けられている．□

今後，次のように表わすことにします：

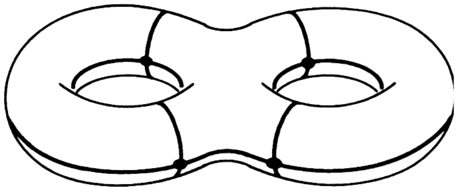
v ＝胞体分割の頂点の個数

e ＝胞体分割の辺の本数

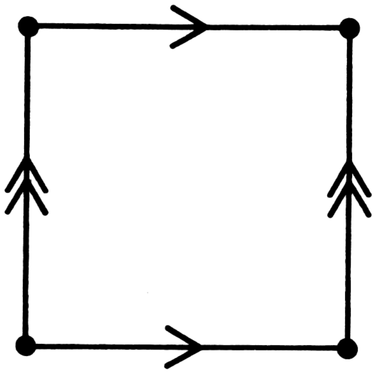
f ＝胞体分割の面の枚数



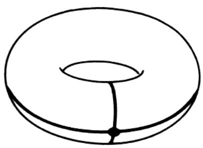
(a)　S^2 の胞体分割



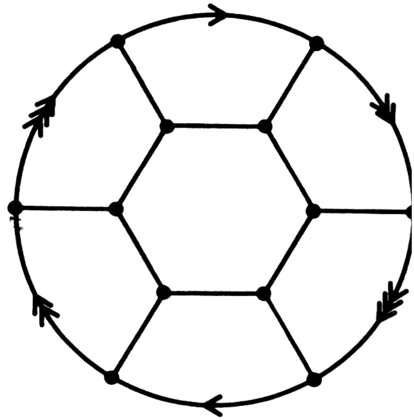
(b)　$T^2\#T^2$ の胞体分割



(c)　T^2 の胞体分割



挿入図



(d)　P^2 の胞体分割

図12.1：いくつかの典型的な胞体分割

したがって，例えば上の S^2 の胞体分割では $v=6$，$e=12$，$f=8$ であり，$T^2 \# T^2$ の胞体分割は $v=8$，$e=16$，$f=6$ です．

ところで，我々は通常，胞体分割の辺は測地線であると仮定します．Gauss-Bonnet の公式と Euler 数を「発見する」ためには，多角形について 2 つの事実が必要になります．n 辺をもつ多角形は **n 角形**と呼ばれます．

演習問題12.2. ユークリッド平面では，任意の三角形の角の和は丁度 π ラジアンである．(公式は無視して)図12.2を用いて，ユークリッド n 角形の角の和は $(n-2)\pi$ ラジアンになることを導き出せ．このように，四辺形の角の和は 2π，五角形の角の和は 3π，等々となる．□

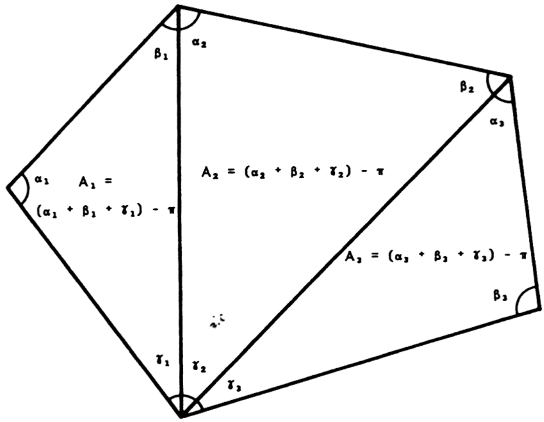


図12.2：n 角形は $n-2$ 個の三角形に分割できる．

演習問題12.3．単位球面上の三角形の面積は，その角の和マイナス π である（記号では $A=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$）．単位球面上の n 角形の面積は $A=$(すべての角の和)$-(n-2)\pi$ となることを導き出せ．（ヒント：n 角形の面積は，図12.2により $n-2$ 個の三角形の面積の和となる．）前の演習を参考にすると「球面上の n 角形の面積は実際の n 角形の角の総和とその n 角形が平坦であるときの角の総和の差に等しい」と，この公式を解釈できる．□

演習問題12.4．双曲平面における n 角形の面積の公式を求めよ．□

これで，Gauss-Bonnet の公式と Euler 数を「発見する」ことはかなり易しくなりました．まず球面についてやってみましょう．球面に胞体分割を行ないます——どんな胞体分割でもいいのです．問題は，球面の面積を胞体分割の面の面積の和として表わし，ついで公式

$$A=(\text{角の和})-(n-2)\pi$$

を用いて，各面の面積について新しい表示を得ることです．次に，直観力を用いて，どうなるのか見てみましょう．

まず全体としての計算を書き，それから元に戻って，それぞれの段階を説明しましょう.(特別な問題として，この説明を読む*前に*自分自身でどれ位この計算ができるかやってみるのもいいでしょう.)

(1)　全面積

$$=\begin{pmatrix}\text{第一の面}\\\text{の面積}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{第二の面}\\\text{の面積}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\text{最後の面}\\\text{の面積}\end{pmatrix}$$

(2)
$$=\left[\begin{pmatrix}\text{第一の面}\\\text{の角の和}\end{pmatrix}-(n_1-2)\pi\right]+\cdots+\left[\begin{pmatrix}\text{最後の面}\\\text{の角の和}\end{pmatrix}-(n_k-2)\pi\right]$$

(3)
$$=\left[\begin{pmatrix}\text{第一の面}\\\text{の角の和}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\text{最後の面}\\\text{の角の和}\end{pmatrix}\right]$$
$$-(n_1+n_2+\cdots+n_k)\pi+(2+2+\cdots+2)\pi$$

(4)
$$=\begin{pmatrix}\text{胞体分割全体の}\\\text{すべての角の和}\end{pmatrix}-(n_1+n_2+\cdots+n_k)\pi+(2+2+\cdots+2)\pi$$

(5)
$$=2\pi v-2\pi e+2\pi f$$

(6)
$$=2\pi(v-e+f).$$

段階を追った説明：

第１段階　曲面の面積を胞体分割の面の面積の和として書く.

第２段階　（演習問題12.3より）公式

$$A=(\text{角の和})-(n-2)\pi$$

を用いて各面の面積の新しい式を得る.

第３段階　項をまとめる.

第４段階　すべての面の角の総和をとるのは，胞体分割全体の角すべての総和をとるのと同じであることに注意する.

第５段階　この段階で３つのことが進行する.

段階 A. 胞体分割のあらゆる角の和は $2\pi v$ である. これは，v 個の頂点があり，各頂点を囲む角の和が 2π となるからである. 特別な例として，図12.1(a)に示されている S^2 の胞体分割を考える：すべての角の和を

$$(\text{各面の角の和})\times(\text{面の枚数}) = (\pi/2+\pi/2+\pi/2)\times 8 = (3\pi/2)\times 8 = 12\pi$$

と計算する代りに，次のように計算する：

$$(\text{各頂点を囲む角の和})\times(\text{頂点の個数}) = 2\pi\times v = 2\pi\times 6 = 12\pi.$$

段階 B．$n_1+n_2+\cdots+n_k=2e$ に注目する．ただし，e は胞体分割のすべての辺の本数である．各 n_i はある面の辺の本数を表わす．すべての n_i を加えて胞体分割全体におけるすべての辺の総和をとる．しかし，各辺は2枚の面の境界であるから2度数えられている．これが，$n_1+n_2+\cdots+n_k$ は単に e ではなく，$2e$ に等しい理由である．特別な例を挙げるとよくわかるかもしれない．図12.1(a)に示されている S^2 の胞体分割は8枚の面をもち，その各々は3本の辺をもつ．したがって，この胞体分割は $8\times 3=24$ 本の辺をもつように見えるかもしれないが，それぞれの辺は2度数えられているので，実際は12本の辺があるだけである．

段階 C．第5段階の最後の部分は $2+2+\cdots+2=2f$ を代入することである．ただし，f は胞体分割における面の枚数である．これは理解しやすい．(1)の等式に戻ると，胞体分割の各面について1つの項があったから，和 $2+2+\cdots+2$ は各面について1つの2を含まねばならない．

第6段階　2π でくくる．

面積$=2\pi(v-e+f)$という公式はすばらしい結論です！　単位球面は面積 4π をもつことがわかっていますから，この公式は，*どんな胞体分割を選んでも* $v-e+f$ は2で*なければならない*と言っているのです．

演習問題12.5．図12.1(a)の胞体分割について $v-e+f=2$ であることを確かめよ．次に，(正多角形であろうとなかろうと)S^2 の任意の他の胞体分割を

描き，同じように $v-e+f=2$ となることを確かめよ．□

公式 $A=2\pi(v-e+f)$ を導き出すのに，考えている曲面が球面であるという事実に依存してはいませんでした．それはただ，その曲面が単位球面の*局所*幾何をもつということが必要なだけでした．したがって，この計算は半径1の射影平面にも同じようにうまく当てはまります．射影平面は球面の面積の半分しかない半球面からできていますから，この場合，公式 $A=2\pi(v-e+f)$ は $2\pi=2\pi(v-e+f)$ となり，結論は「$v-e+f$ は P^2 の*あらゆる*胞体分割について1に等しくなければならない」ということになります！

演習問題12.6．図12.1(d)に示され，演習問題12.1で考えている P^2 の胞体分割について $v-e+f=1$ であることを確かめよ．次に，P^2 の他のいくつかの胞体分割を描き，それについても $v-e+f=1$ であることを確かめよ．□

公式 $A=2\pi(v-e+f)$ は楕円幾何をもつ曲面のための **Gauss-Bonnet の公式**です．量 $v-e+f$ が Euler 数です．これは常にギリシア文字 χ で表わします．したがって，$\chi\equiv v-e+f$ であり，楕円幾何に対する Gauss-Bonnet の公式は $A=2\pi\chi$ と書けます．S^2 の任意の胞体分割に対して $\chi\equiv v-e+f=2$ ですから，「球面の Euler 数は2である」といい，$\chi(S^2)=2$ と書きます．同様に，射影平面は Euler 数1をもち，$\chi(P^2)=1$ と書きます．

演習問題12.7．$A=2\pi\chi$ の証明を修正し，双曲幾何をもつ曲面に対して同じような Gauss-Bonnet の公式を求めよ．□

演習問題12.8．図12.1(b)の胞体分割を用いて，$\chi(T^2\#T^2)$ を計算せよ．解答を検討するために，異なる胞体分割(例えば，$T^2\#T^2$ は演習問題11.3のように4枚の六角形に分割できる)を用いて $\chi(T^2\#T^2)$ をもう1度計算せよ．□

演習問題12.9. (標準)双曲幾何をもつ2穴ドーナツ曲面の面積はどうなるか? ヒント:上の2つの演習問題から解答を求めよ. □

演習問題12.10. 3穴ドーナツ曲面のEuler数を計算せよ. 双曲幾何をもつ3穴ドーナツ曲面の面積はどうなるか? □

ユークリッド幾何をもつ曲面についてもGauss-Bonnetの公式があります. ユークリッド幾何では, n角形の角の和は(演習問題12.2を思いおこすと)正確に$(n-2)\pi$ですから, 任意の胞体分割について

$$\begin{pmatrix}\text{第一の面}\\ \text{の角の和}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\text{最後の面}\\ \text{の角の和}\end{pmatrix}=(n_1-2)\pi+\cdots+(n_k-2)\pi,$$

$$\begin{pmatrix}\text{胞体分割全体の}\\ \text{すべての角の和}\end{pmatrix}=(n_1+n_2+\cdots+n_k)\pi-(2+2+\cdots+2)\pi,$$

$$2\pi v=2\pi e-2\pi f,$$

$$2\pi(v-e+f)=0$$

となります. ただし, 各段階は上で楕円のGauss-Bonnetの公式を導き出したときと同じです. $0=2\pi(v-e+f)=2\pi\chi$ですから, ユークリッド幾何をもつ曲面はEuler数0をもたねばなりません.

演習問題12.11. 図12.1(c)の胞体分割を用いて, トーラスのEuler数を計算せよ. 次に, 読者自身の構成した異なる胞体分割を用いて, それをもう1度計算せよ. 2つの異なる胞体分割を用いて, $\chi(K^2)$を計算せよ. □

この3つのGauss-Bonnetの公式は, 曲面が双曲幾何(*負*の曲率), ユークリッド幾何(*零*の曲率), 楕円幾何(*正*の曲率)をもつかに応じて,

$$kA = 2\pi\chi, \quad \text{ただし,} \quad k = -1, 0, +1$$

と要約できます．本章の後半で Gauss-Bonnet の公式のもっと一般な形が求められますが，今の時点でも，いかなる曲面も複数の等質幾何はもたないことを導き出せます．この幾何の「曲率」($k=-1, 0, +1$) は Euler 数と同じ符号をもたねばなりません．直観的には，曲面の大域位相はどの等質な局所幾何がそれに「適合する」かを決定します．

演習問題12.12．前出の演習では，$\chi(S^2)$，$\chi(T^2)$，$\chi(T^2\#T^2)$，$\chi(T^2\#T^2\#T^2)$ を計算したが，そのパターンは何か？　$\chi(T^2\#T^2\#T^2\#T^2)$ についてはどう思うか？　□

n 個のトーラスの連結和の Euler 数に対する一般公式は簡単に導き出せます．演習問題11.3で，n 穴ドーナツ曲面は，その隅が 4 個のグループとなって合う $4n-4$ 枚の六角形に分割できることを見つけました．そのような胞体分割が何本の辺と何個の頂点をもつか一度わかれば，Euler 数を計算するのは易しいことです．

1. $6\times(4n-4)\div 2 = 12n-12$ 本の辺がある．　*理由*：$4n-4$ 枚の六角形の各々は 6 本の辺を与え，総計 $24n-24$ 本になる．しかし，各辺は 2 枚の六角形の境界なので 2 度数えられているという事実を補うために，2 で割らなければならない．
2. $6\times(4n-4)\div 4 = 6n-6$ 個の頂点がある．　*理由*：$4n-4$ 枚の六角形の各々は 6 個の頂点を与え，総計 $24n-24$ 個になる．しかし各頂点は，4 枚の六角形の角なので 4 度数えられているという事実を補うために 4 で割らなければならない．

n 個のトーラスの連結和の Euler 数は，演習問題12.12で確立したパターンと一致する次の数です：

$$\begin{aligned}\chi &= v-e+f\\ &=(6n-6)-(12n-12)+(4n-4)\\ &=2-2n.\end{aligned}$$

演習問題12.13. n 枚の射影平面の連結和は，4 隅が 4 個からなるグループで合う 2 枚の $2n$ 角形に分割される（図11.4）．この Euler 数を計算せよ．図12.3の表を完成せよ．□

Euler 数	向き付け可能性：向き付け可能	向き付け可能性：向き付け不能
2	S^2	
1		P^2
0	T^2	
-1		
-2	$T^2\#T^2$	
-3		
-4	$T^2\#T^2\#T^2$	
-5		
-6	$T^2\#T^2\#T^2\#T^2$	
-7		
-8	$T^2\#T^2\#T^2\#T^2\#T^2$	
.		
.	etc.	
.		

図12.3

演繹的には，2 つの多様体が位相的に同じであるかどうかを決定するのは難しいでしょう．事実，2 つの *3 次元* 多様体が位相的に同じものかどうかを決定する問題はとても難しいので，多くの人々が何十年も研究したにもかかわらず，誰もまだこれを決定する絶対確実な方法を見つけてはいません．（2

つの3次元多様体を区別する多くの*実用的な*方法はありますが，その方法のどれをとっても，同じように見える多様体の適当な対に「騙される」ことがあるのです.）この事実に照らせば，図12.3の表に従ってEuler数を計算し，それが向き付け可能かどうかを決めるだけで決定的に曲面を確定できるというのは驚くべきことです！　例えば，もしある曲面がEuler数-4をもち向き付け可能ならば，この表を調べて，その曲面は位相的に$T^2\#T^2\#T^2$に同値に違いないと結論できます．同様に，Euler数-2をもつ向き付け不能な曲面は$P^2\#P^2\#P^2\#P^2$に違いないのです．

演習問題12.14．図11.1の各曲面に対して（注意深く辺と頂点を数えて！），Euler数を計算し，その向き付け可能性を決定せよ．更に，図12.3の表を用いて，その曲面を確認せよ．図11.2における曲面についても同様にせよ．□

Gauss-Bonnetの公式$kA=2\pi\chi$を，「標準」楕円幾何（半径1の球面の幾何),「標準」双曲幾何，あるいはユークリッド幾何をもつものばかりではなく，すべての等質曲面に適用したいと思います．例えば，この公式を半径3の球面にどのように適用するかを考えてみましょう．半径3の球面は半径1の球面と同じEuler数をもちますが，その面積は9倍の大きさなのです．したがって，もし公式$kA=2\pi\chi$がやはり成り立つとすれば，その「曲率」kは，わずか1/9の大きさしかないことになります．これは理屈に合わないわけではありません．より大きい球面は，確かに，より小さい球面より曲がり具合が少ないように見えます(図12.4)．一般に，半径rの球面の**曲率**を$k\equiv 1/r^2$と定義します．半径rの球面の局所幾何をもつ射影平面も**曲率**$k\equiv 1/r^2$をもちます．

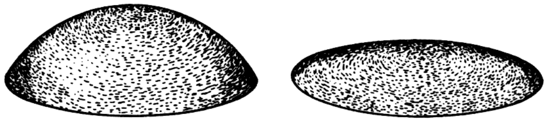


図12.4：小さな球面の１片は，大きい球面の１片よりも曲がっている.

演習問題12.15. もし距離が m（メートル）で測定されるならば，曲率はどういう単位で測定されるか？　kA の単位は $2\pi\chi$ の単位と合致するか？ □

演習問題12.16. 半径 2 m の射影平面の曲率，面積，Euler 数を計算せよ. そして Gauss-Bonnet の公式が成り立つことを確かめよ.（半径 r の球面の面積は $4\pi r^2$ である.） □

上の曲率の定義は「もし我々が半径 1 の球面より始め，因子 r だけすべての距離を拡大する（$r>1$ は球面が実際膨らむことを意味し，$r<1$ は縮むことを意味する）ならば，その結果できる球面は曲率 $k\equiv 1/r^2$ をもつ」と言い換えられます. この言い換えた定義はぎこちないですが，最初の定義とは違って「半径」という概念を除いており，双曲平面にも適用できます. 標準双曲平面は曲率 $k\equiv -1$ をもちます. 標準双曲平面におけるすべての距離を因子 r だけ拡大するとき，それにより生じた双曲平面の**曲率**は $k\equiv -1/r^2$ と定義します. このような双曲平面の局所幾何をもつ任意の曲面も曲率 $k\equiv -1/r^2$ をもちます. 例えば，もし $T^2\#T^2$ に標準双曲幾何が与えられると，その曲率は -1，面積は 4π であり，Gauss-Bonnet の公式は $(-1)(4\pi)=2\pi(-2)$ となります. しかし，その曲面が因子 5 だけ拡張されると，曲率は $-1/25$，面積は $25\times 4\pi=100\pi$ となり，Gauss-Bonnet の公式は $(-1/25)(100\pi)=2\pi(-2)$ となります.（やはり正しいのです！）

演習問題12.17. Flatland 人の社会は $T^2\#T^2\#T^2$ の大域位相と一定の曲率 $-0.00001\mathrm{m}^{-2}$ の等質な局所幾何をもつ宇宙にある. 彼等の宇宙の面積はどれ

ほどか？ □

等質幾何をもつ任意の曲面を「一定の曲率 k の曲面」と言うことができ，その際の k の正確な値は当の曲面の幾何に依存しています．我々は k が正のときの楕円幾何をもつ曲面，k が零のときのユークリッド幾何をもつ曲面，k が負のときの双曲幾何をもつ曲面について議論しています．k が零に近づくにつれて曲面は平たくなり，（いずれの方向でも）k が零から遠くなればなるほど曲面は（正か負のいずれかに）もっと曲がります．曲率 k は通常 **Gauss 曲率**と呼ばれます．この用語を用いて，次のように結果を要約できます：

曲率一定の曲面に対する統一 Gauss-Bonnet の公式

曲面が面積 A，Euler 数 χ，一定の Gauss 曲率 k をもつならば，

$$kA = 2\pi\chi.$$

演習問題12.18．Flatland 人の社会は面積1,984,707m²，一定のガウス曲率 $-3{,}1658\times10^{-6}\text{m}^{-2}$ の曲面にある．この曲面の大域位相は何か？ □

演習問題12.19．面積 6 m² をもつ $P^2\#P^2\#P^2$ と面積 9 m² をもつ $T^2\#T^2$ とでは，どちらがより曲がっているか？ □

Flatland 人が曲率をどのように測定するのか疑問に思うかもしれませんね．彼らは三角形の面積と角を測定して曲率を計算します．半径 1 の球面上の三角形については $A_\triangle=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$，標準双曲平面上の三角形については $A_\triangle=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$，平坦な曲面上の三角形については $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であることを思い出して下さい．これら 3 つの公式は $kA_\triangle=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ と要約できます．ただし，その幾何に従って $k=-1, 0, +1$ です．驚くことはあり

ませんが，この公式は任意の定 Gauss 曲率 k をもつ曲面上の三角形に成り立ちます．実際，$k>0$ については，この公式は演習問題9.3で導き出した公式

$$A_{\triangle}=r^2[(\alpha+\beta+\gamma)-\pi]$$

に同値なのです．(ついでながら，本章では，$A_{\triangle}$ は三角形の面積，A は曲面全体の面積を表わします．)

演習問題12.20．Flatland 人の調査隊は三角形の角を 34.3017°，62.5633°，83.1186°，またその面積を 2.81km² と測定した．彼等の宇宙が等質であると仮定すれば，その Gauss 曲率はどうなるか？（忘れずに角をラジアンに変えること．）後に Flatland 人は，自分達の宇宙が向き付け可能で，大体 250,000 km² の面積であることを発見する．その大域位相を導き出せ．□

Gauss-Bonnet の公式は，Gauss の曲率が点から点へ不規則に変化する非等質曲面にも成り立つように一般化することができます．そのアイディアは，正と負の曲率は消去し合い，正味の全曲率は $2\pi\chi$ に等しいというものです．例えば，ドーナツ曲面上では，正確に正の曲率は負の曲率を消去します．（ドーナツ曲面の外側の凸状部分は正の曲率をもち，穴の廻りの部分は負に曲がっています．）曲面をどのように変形しようと，その全曲率を決して変えることはできません！　1つの場所に正の曲率を創ると，どこか他の場所に必ず等しい量の負の曲率を創ることになります．

演習問題12.21．曲面上にふくらみを作ると，正の曲率の小さな領域ができる（図12.5）．それを補う負の曲率の領域はどこか？　□

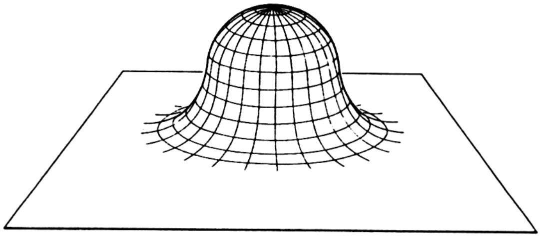


図12.5：曲面上にふくらみを作ると，正の曲率の小さな領域ができる．それを補う負の曲率の領域はどこか？

微積分の言葉を用いて，この新しい Gauss-Bonnet の公式を正確に述べることができます．全曲率は曲面上の曲率の積分として表わされ，Gauss-Bonnet の公式は

$$\int k dA = 2\pi\chi$$

となります．〔数学の経験を積んだ読者には，次の証明の各段階を容易に理解することができます．その基本的なアイディアは

(1) 積分を和として概算するには十分細かい胞体分割を用いる；

(2) 公式 $kA_{\triangle}=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ を n 角形にも成り立つように一般化して（図12.2参照），代入する；

(3) 楕円の Gauss-Bonnet の公式を導き出したように進む

ことです：

$$\begin{aligned}\int k dA &= \sum k_i A_i \\ &= \sum[(\alpha_i+\beta_i+\cdots+\xi_i)-(n_i-2)\pi] \\ &= \sum(\text{すべての角})-\pi(\sum n_i)+\pi(\sum 2) \\ &= 2\pi v-2\pi e+2\pi f \\ &= 2\pi\chi.\end{aligned}$$

k が一定のとき，この公式は $kA=2\pi\chi$ と簡単になることに注意して下さい．〕

第III部　3次元多様体上の幾何

13

4次元空間

Edwin Abbott：Flatland の書では，Square 氏の 2 次元の世界はたまたま 3 次元空間に埋め込まれています．この 3 次元空間から Sphere 氏が Square 氏を訪ずれ，3 次元の世界について彼に話すときに，この著書はクライマックスに達します．驚くほどのことでもありませんが，Square 氏はこの Sphere 氏の説明が全くわからないのに気付きます．そこで，「Sphere 氏は言葉で言ってみても無駄なので行為に訴えます」(Flatland，p.77)．彼はSquare氏の

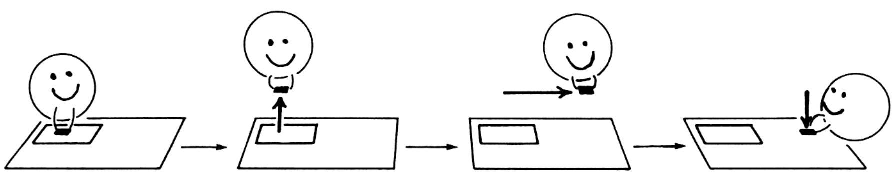


図13.1：Sphere 氏が食器棚より銘板をどのように取り出したか．

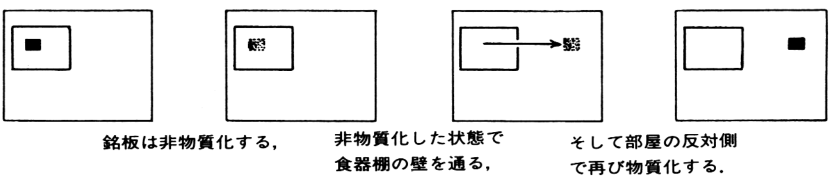


図13.2：この出来事に対する Square 氏の誤った印象．

錠の掛かった食器棚に行き，一枚の銘板を取り上げ，それを少し動かし，Flatland の平面に置きます（図13.1）．

全く当然のことながら，Square 氏はひどいショックを受けます．彼に言えるのは，銘板がどういうわけか非物質化し，その状態のまま錠の掛かった食器棚の壁を通り，それから部屋の別の側で再び物質化したということだけです．これにはとても狼狽しました．

それだからと言って，我々は哀れな Square 氏を責めることはできません．全生涯を通じて，彼はただ前後，左右の動きだけしか経験していませんから，我々 3 次元空間に住むものが上下運動と呼ぶような動きをどう考えていいのかわからないのも驚くにはあたりません．銘板が前後，左右に動くことなしに食器棚から外へ動くとき，それはそのままだが，どうしたことか希薄になり，その結果，壁を通りすぎたのだろうと彼が推測するのも全く当然なのです（図13.2）．

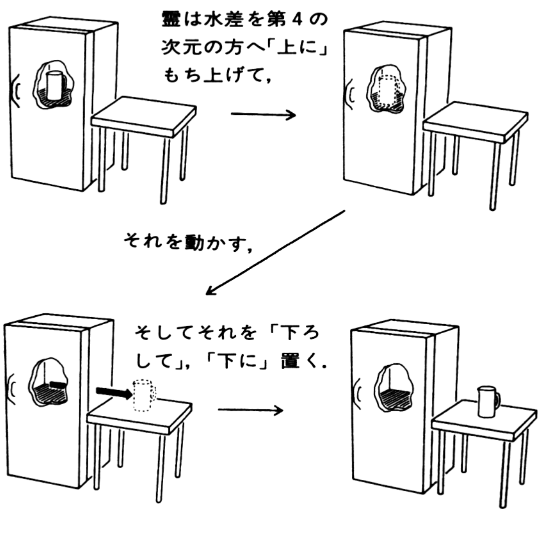


図13.3： 4 次元の生き物はドアを開けずにジュースの水差をどのように冷蔵庫から取り出すか．

もし何か不思議な生き物が，4次元空間をしばらくぶらぶらした後，冷蔵庫のドアを開けずにジュースの入った水差を冷蔵庫から取り出しテーブルの上に置いたとすれば，あなたはどう感じるか想像してみて下さい．勿論，その生き物が水差を第4の次元の方へ「*上に*」もち上げ，冷蔵庫の壁「*越しに*」通し，我々の3次元空間の方へ「*下に*」置くというのがこの説明です．図13.3を図13.2と比べて下さい．

次章では4次元空間を用いて超球面の定義をしましょう．超球面の定義には，通常の球面に3つの次元が必要なように，4つの次元が必要です．けれどもまず，他の4次元現象をいくつか見たり，二，三の哲学的疑問を取り扱ってみましょう．

他の4次元現象

R. Rucker は Geometry, Relativity and the Fourth Dimension の11ページにおいて Sphere 氏が Square 氏の銘板を運び去ったのと全く同じように，霊は3次元の物を運び去ることのできる4次元の生き物であると考えたツェルナーという名の神秘学者について語っています：

> ……ツェルナー教授は彼らの4次元性について永続的かつ明白な証明を与えるような何かをこの霊にさせようとも心にかけていた．そのアイディアは素晴らしかった．彼は顕微鏡で検査しても決して切り離されてはいないことがわかるような固い木材から2個の輪を刻み出させたのである．霊は自由に第4の次元に動けるから，どちらの輪も壊すことも切り離すこともなく，2個の輪をつなぐことができるというのがアイディアであった．この輪は，つながれた状態で刻み出されたのではないことを保証するために，異なった種類の木材，1個はハンノキ，1個はオークからできていた．ツェルナーはそれらを降霊会にもって行き，霊にそれらをつなぐように言ったが，残念ながら，霊はやらなかった．

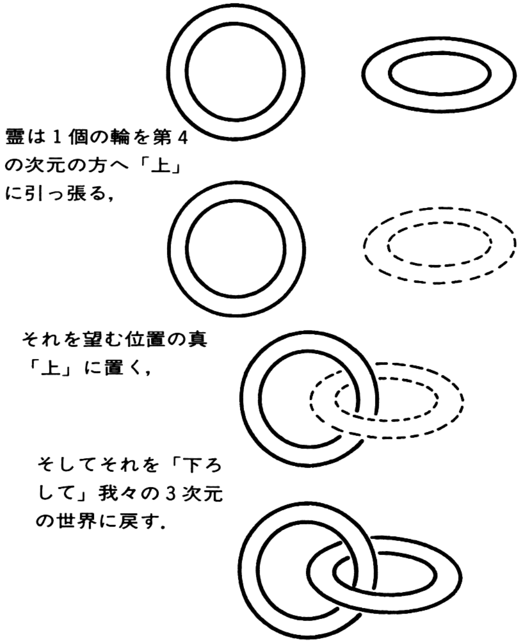


図13.4： 4次元の霊は2個の輪をつなぎ合わすことができた．

図13.4は，霊がいかに2個の輪をつなぐのかを想像した図です．

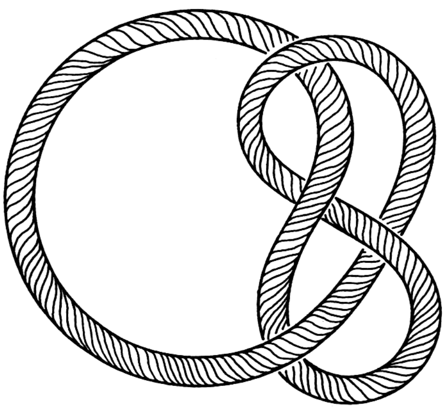


図13.5： 4次元の霊はこの「8の字」の結び目をどのようにほどくことができるか？

演習問題13.1. 4 次元の霊は図13.5のようなもつれたロープの輪をどのようにほどくことができるか？ □

演習問題13.2. 第 4 章では，クラインの壺に自分自身と交差するのを許して E^3 に埋め込むことができた(図4.9)．自己交差なしで，クラインの壺を E^4 に埋め込む方法を説明せよ．(通常，3 次元空間は E^3，平面は E^2，直線は E^1 と書くように，「通常」の 4 次元空間は E^4 と略記する．) □

先へ進む前に，もう 1 つ 4 次元のおもしろさについて語っておきたいのです．円が 3 次元空間で結び目を作れるように，球面は 4 次元空間に結び目を作れます．Square 氏が結び目のある円 (図13.6) をどのように想像するか少し考え，類推によって結び目のある球面 (図13.7) を理解しようとしてみて下さい．

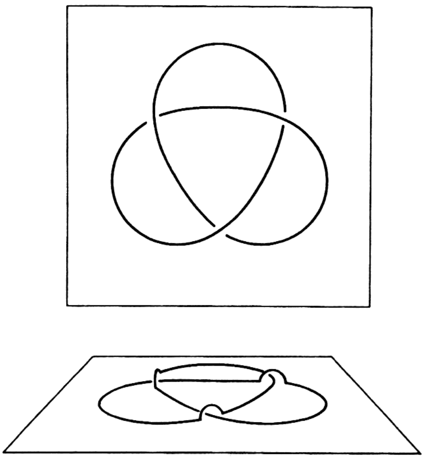


図13.6：E^3 における結び目のある円を想像するために，Square 氏は，まず自己交差する(位相的な)円を描く．次に，各交差点で，この円の一部が他の部分の上を第 3 の次元で越えることを想像する．我々 3 次元空間に住むものには，この結果できた結び目のある円を簡単に視覚化できる．

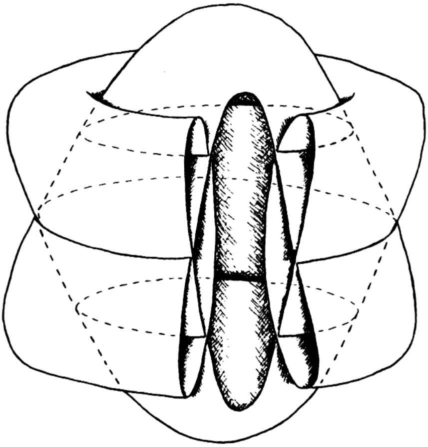


図13.7：E^4 における結び目のある球面を想像するために，我々3次元空間に住むものは，まず自己交差する（位相的な）球面を描く．次に，この交差した各円に沿って，この球面の一部が他の部分の上を第4の次元で越えることを想像する．

哲学的解説

(1)　4次元空間は視覚化できないと多くの著者が主張しています．これは全く正しくありません．（E^4 を E^3 とは違った風に視覚化しなければならないというのは正しいのです．）私の個人的な意見では，あなたの頭脳は3次元と同じように4次元を視覚化*する力があります*．3次元が実際上ずっと易しいのは，我々の宇宙が3次元であるからです．あなたは生まれた日からずっと3次元が理解できるように練習を積んできています．4次元を視覚化するのは最初難しく退屈です――それは丁度生まれたばかりの赤ん坊が，最初はきっと3次元に混乱するのと同じです．練習すれば易しくなります．

(2)　物理学者は，3次元空間と1次元の時間を合わせて**時空**と呼ばれる4次元実体によく結びつけます．もともと，私はこの考えを詳細にここで述べるつもりでしたが，R. Rucker：Geometry, Relativity, and the Fourth Dimension の第4章「高次元としての時間」で述べられている議論を改良で

きるとは思っていません．今，ここで読者に一般的なアイディアを述べるために，次の説明と共に，その章から図78(ここでは図13.8)を再録しました：

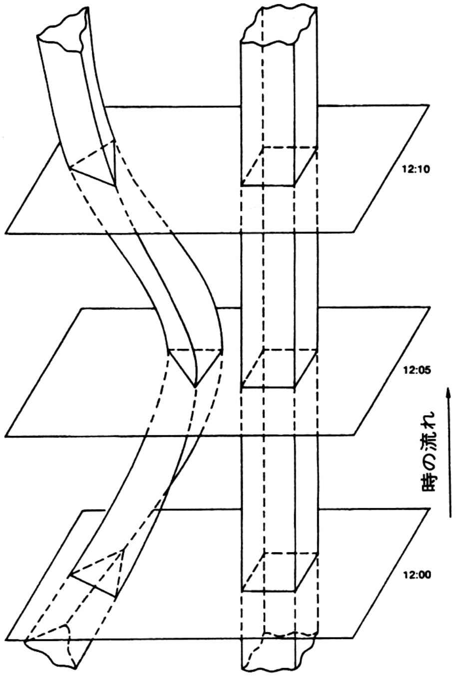


図13.8：R. Rucker の Geometry, Relativity and the Fourth Dimension からの図78.

時空について心にイメージを描くために，Flatland に戻ってみよう．Square 氏が1人で畑に座っていると想像する．正午に西方より近づいてくる父の Triangle 氏を見る．12時5分に Triangle 氏は Square 氏の傍に来て，少し彼と話をし，来た方向へ帰る．さて，もし時間が空間に垂直な方向であると考えれば，Flatland 人の時間を Flatland の平面に垂直な方向として表わすことができる．「時刻が遅い」と「第3次元で高い」ということは同じことだと仮定すれば，図78で示したように，動かない Flatland 人を垂直な虫あるいは痕跡

によって，また，動く Flatland 人を曲がっている虫あるいは痕跡で表わすことができる．

これら 3-D時空の虫を我々は時を超越した存在として考えることができる……

Rucker は更に，このアイディアが意識，時間の知覚，実在性に対してもつ意味の説明もしています．この著書は示唆に富むものですから，是非一読を勧めます．(急ぐならば，残りの部分とは無関係に，その章だけを容易に読めます．)

第14章では純粋に空間的な方法で4次元を想像することに固執します——時間は全然登場してきません．

(3) 最後の形而上学的解説：我々の想像する4次元空間は純粋に数学的抽象です．3次元の宇宙のように，それが物理的に存在するとは主張しません．

14

超球面

おおよそ，球面は円に似たもので，ただ1次元大きいだけです．超球面あるいは3-球面は球面より1次元大きい類似な3-多様体です．円，球面，超球面の正式な定義を比べて下さい：

1. 単位円（＝1-球面＝S^1）は，原点より1単位離れたE^2における点の集合である．位相的にそれと同値なものは何でも**位相的円**と呼び，幾何的に同値なものは**幾何的円**と呼ぶ；
2. 単位球面（＝2-球面＝S^2）は，原点より1単位離れたE^3における点の集合である．位相的にそれと同値なものは何でも**位相的2-球面**と呼び，幾何的に同値なものは**幾何的2-球面**と呼ぶ；
3. 単位超球面（＝3-球面＝S^3）は，原点より1単位離れたE^4における点の集合である．位相的にそれと同値なものは何でも**位相的3-球面**と呼び，幾何的に同値なものは**幾何的3-球面**と呼ぶ．

用語上の注意：我々の2-球面は3次元空間で定義されており，ここではそれは3次元球体の境界です．この用語は数学者の間では普通なのですが，物理学者の間ではそうではありません．ですから，2-球面を3-球面と呼ぶ人がいても驚かないで下さい．そういう人は2-球面がたまたま存在する空間の次元にただ興味があるだけであり，我々は2-球面自身の内在的次元に興味があ

るのです．（2-球面は，たとえ図13.7の結び目のある2-球面のようにE^4にあっても，内在的に2次元なのです．）同じ説明が3-球面にも当てはまります．また既に用いた「球面」と「球体」との違いにも十分に注意して下さい．「球面」を「球体」の意味に用いる人もいますが，我々はそうしません．しかし，我々は「円板」と「球体」を同じように使います．（2次元では「円板」と言った方がいいし，3次元では「球体」の方がいいように聞こえますが，この概念は本質的に同じなのです．）

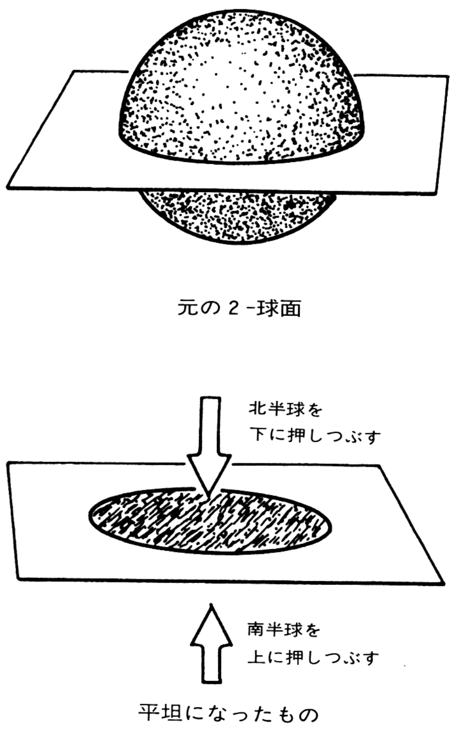


図14.1：Square 氏は2-球面を位相的に2枚の重ね合わせた円板として視る．

3 -球面はどのように視覚化できるか？　この疑問に答えるために，Square 氏が 2 -球面をどのように視覚化するか見てみましょう．彼はただその位相にのみ関心があって，その幾何には興味がないのだと差し当たり仮定して下さい．図14.1に示すように，彼は Flatland の平面に球面を平らにすることにより物事を自分で単純にしてしまいます．Flatland では，北半球と南半球はそれぞれ円板になります．2 枚の円板は重ね合わされ，その円状の境界（赤道）に沿って接合されます．このようにして 2 -球面を視覚化する作業は，2 枚の重なり合った円板を視覚化する作業に簡素化されます．しかし，赤道の「折り目」は実際の 2 -球面には存在しないことを Square 氏は記憶していなければなりません…．それはただ，平らにする過程の産物にすぎません．この 2 -球面を視覚化する方法は**二重円板法**と呼ばれ，3 -球面を視覚化するのと似ています（演習問題14.1を参照）．

演習問題14.1． 3 -球面を E^3 で重なり合った 2 つの球体として位相的に想像せよ．これらの球体は球面状の境界に沿って接合されている．(S^3 の赤道は 2 -球面である！）　□

演習問題14.2． 2 -球面の幾何を回復するために，Square 氏は第 3 の次元の上方へ曲がった 1 枚の円板と下方へ曲がったもう 1 枚の円板を想像する．演習問題14.1の心のイメージを少し修正して第 4 の次元に 1 個の球体を「上方へ」，もう 1 個の球体を「下方へ」曲げよ．　□

注意：表面は抽象的に貼り付けられているが重なり合ってはいない 2 個の球体として 3 -球面を想像することで，3 -球面の大域位相をもっと容易に理解する読者もいるでしょう（図14.2）．

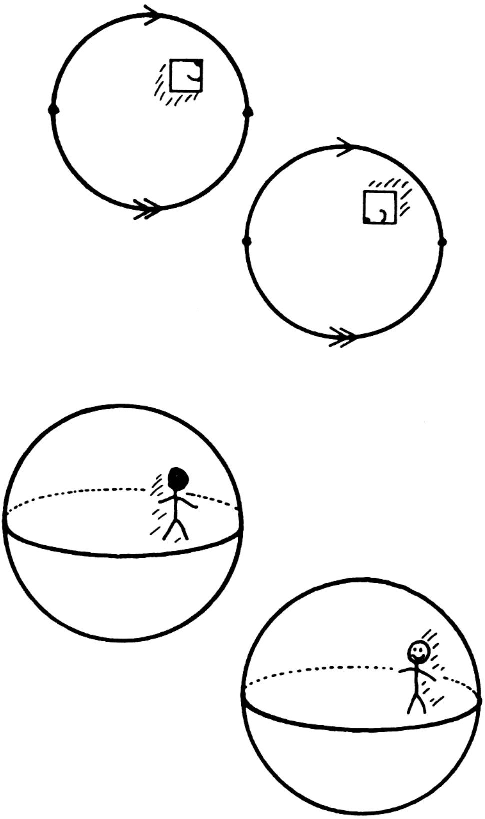


図14.2： 2 -球面は，縁が貼り付けられた 2 枚の円板として位相的に表わされる．同様に，3 -球面は，表面が貼り付けられた 2 つの球体として位相的に表わされる．

演習問題14.3 かなり小さい 3 -球面に住んでいると仮定する．簡単に膨らむ風船に空気を吹き込み続けると終りにはどういうことが起こるか？（ヒント：図 14.3 の Square 氏に終りには何が起こるか？） □

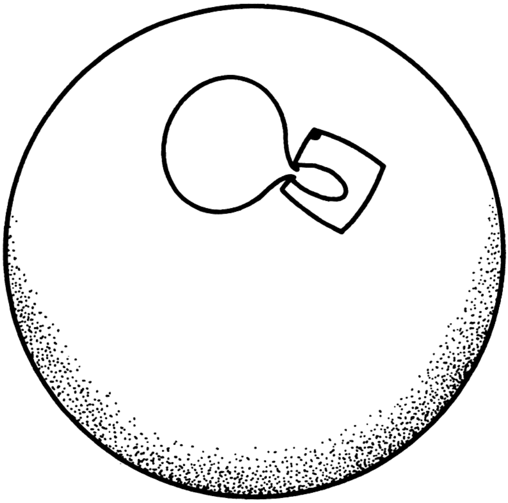


図14.3：Square 氏は 2 -球面上で風船を膨らます.

図14.4は 2 -球面上の（たまたま座標平面の各々と 2 -球面の交わりになっている） 3 つの大円を示しています. 我々 3 次元空間に住むものは, 3 次元空間に 2 -球面を描けるので, これら大円をいとも簡単に視覚化できます. ところが, Flatland 人は 2 -球面を自分達の平面に平らに描きます. 赤道はやはり円ですが, 子午線は線分のように見えます. それぞれはっきり見える線分は, 実は 2 本の線分であり, 1 本は第 3 の次元に上方へ, もう 1 本は下方へ弧状になっていることを Flatland 人は覚えていなくてはなりません. この 2 本の線分を合わせると完全な幾何的円になっています.

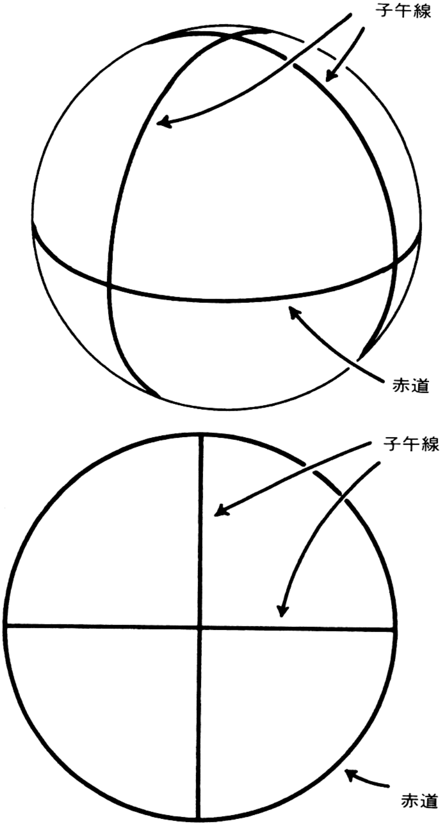


図14.4： 最初の図は３次元空間に住むものの見た２-球面上の３個の大円である．第２の図は，それを水平面に平らにした後の２-球面を上から見た図である．赤道だけはやはり円であるが，各子午線は平らにされて線分になる．

図14.5は３-球面上の（たまたま座標超平面の各々と３-球面の交わりになっている）４個の「大２-球面」を示しています．大２-球面のある３-球面は我々の３-空間に平らにされているので，我々３次元空間に住むものには大２-球面を視覚化するのは難しいのです．「赤道の」２-球面のみがまだ球面のように見えます．他のものはそれぞれ今や円板のように見えます．勿論，それ

それは実際２枚の円板であり，第４の次元に１枚は上方へ，もう１枚は下方へ弧状に曲がっています．２枚の円板は合わせると完全な幾何的球面になっています．

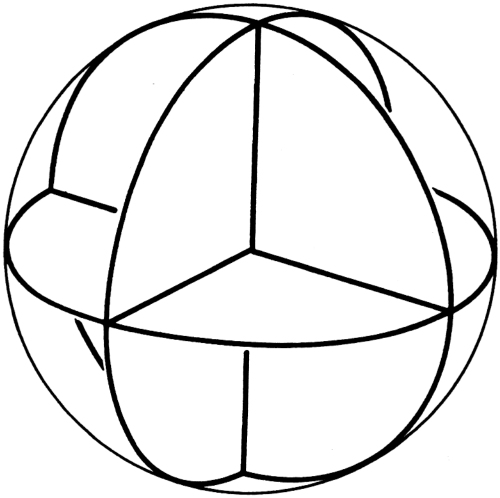


図14.5：この図は超球面における４つの「大２-球面」を表わしており，図14.4の２番目の図に完全に類似している．球体の表面は３-球面の「赤道」である．各円板は２-球面を平らにした残りである．したがって，各円板を第４次元に１つは「上方へ」，もう１つは「下方へ」曲がっている２枚の円板であると想像すればよい．

前の２節では，丁度２-球面の各切口が円であるように，３-球面の各切口がどうして２-球面であるのかを示しています．

もし伸ばすことができないならば，２-球面の１片が平面で裂けて開くように（図9.8），３-球面の１片はユークリッド空間で裂けて開くでしょう（図14.6）．

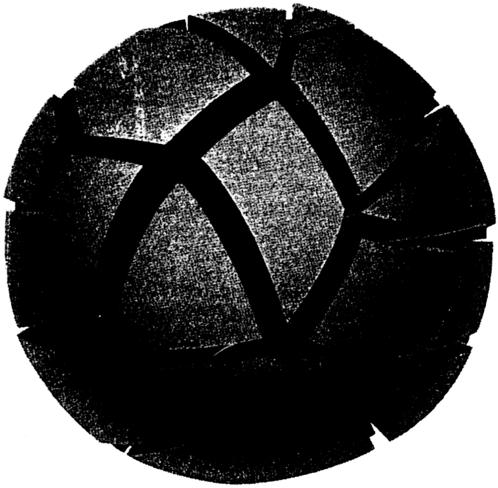


図14.6： もし伸ばすことができなければ，３-球面の１片はユークリッド空間で裂けて開く．この裂けて開いた球体の各断面は図9.8の裂けて開いた円板であることに注意せよ．

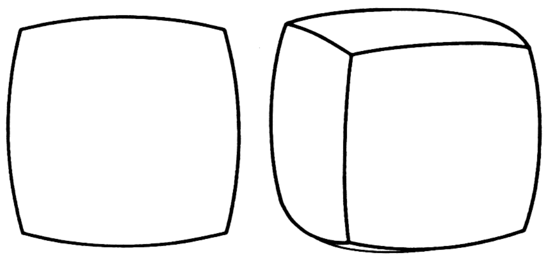


図14.7： ２-球面上の多角形がユークリッド平面上の多角形より大きい角をもつのと同じように，３-球面にある多面体は通常のユークリッド空間にある多面体より大きい角をもつ．注意：ユークリッド平面で球状多角形を表わすとき，角が正しく出るように辺を膨らませるのが普通である．勿論，球面そのものの上では多角形の辺は膨らんでいない —— それらは完全な測地線である．同様に，３-球面にある多面体を表わすには，たとえ辺は３-球面そのものでは膨らんでいなくても，辺と隅の角が正しく出るように辺を膨らませるのが普通である．

3-球面にある多面体はユークリッド空間にある多面体より大きい角をもっています(図14.7). また,「双曲空間」(第15章)にある多面体はユークリッド空間にある多面体よりも小さい角をもっていることがわかります. これらの事実を利用して,曲面の等質幾何を見つけたように(第11章),ある種の3次元多様体の等質幾何を求めてみましょう(第16章).

我々の宇宙は3-球面であると仮定しましょう. 大2-球面の曲率を測定することにより,我々はその曲率を測定できます. また,そこにある三角形の角と面積を測定することで,大2-球面の曲率を計算できます. どの大2-球面を測定しているのか気にしないならば——それらはすべて同じだから気にしないのですが——我々の望むどんな三角形でも測定できます.

演習問題14.4. 恐らく,Gauss は例えば弧10分まで正確な器具を用いて,1辺約100km の三角形の角を測定したのであろう. 彼の検出できる最小の曲率はいくらか? この曲率をもつ2-球面の半径はいくらか? 任意の大2-球面の半径はそれが在る3-球面の半径と同じであるから,前の質問に対する解答は,Gauss が検出できる曲率をもつ最大の S^3-宇宙の半径を表わす. 小さい3-球面は大きい曲率をもち,大きい3-球面は小さい曲率をもつから,大きいものより小さい S^3-宇宙の曲率を発見する方が容易であることに注意せよ. 宇宙がこのように小さいように思えるか? □

Gauss はきっとこのような考察をよく認識していたと思います. そもそも彼は宇宙の曲率を測定しようとはしていなかったのかもしれません. もしそうだとすれば,恐らく双曲宇宙を発見したかったのでしょう.(双曲空間では三角形の角の和は π より小さい.)ところで,近代の宇宙物理学者は非常に異なった方法で宇宙の曲率を測定しようとしています(第19章).

3 -射影空間

第 4 章では，S^2 の半球面の円状の縁にある相対する点を貼り付けて射影平面 P^2 を構成しました．(図4.11を思い出して下さい．) この半球面の局所幾何は「継ぎ目」に沿ってうまく合った（図4.12）ので，S^2 と同じ局所幾何をもつが，異なる大域位相をもつ曲面が得られたのです．

同じようにして **3 -射影空間** P^3 を構成することができます．S^3 の半球面から始め，その（球状の）境界上の相対する点を貼り付けます．その半球面の局所幾何は，球状の「継ぎ目」に沿ってうまく合うことは（少なくとも類推では）明白でしょう．このように，P^3 は S^3 と同じ局所幾何をもつが，異なる大域位相をもつ 3 -多様体なのです．

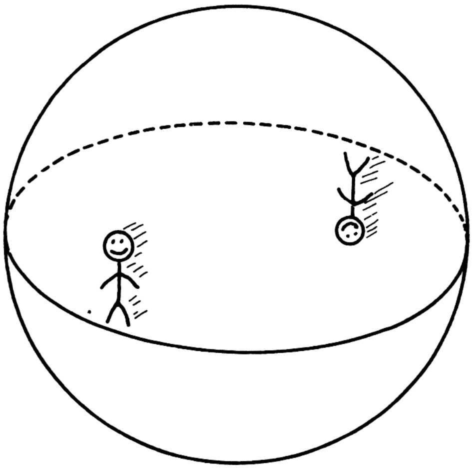


図14.8： P^3 の「継ぎ目」を横切るとき，足のあった所に頭が，右側であった所が左側になって戻る．要するに半回転している．

第 4 章では，位相的な目的のためには P^2 は境界上の相対する点を貼り付けた円板であると考えられることに注意しました．そして，P^3 は境界上の相対する点を貼り付けた球体と考えることができます．射影平面は向き付け不能です．つまり，Flatland 人がこの「継ぎ目」を横切るとき，左右が逆転し

て戻ってきます．一方，3-射影空間は向き付け可能です．あなたがこの「継ぎ目」を横切るときは，左右も，上下も逆転して戻ってきます．要するに，あなたは2通りの鏡像状態になるので，古い自分のまま戻ってくるのです．ただし，違うのは，あなたが180度回転していることです（図14.8参照）．

演習問題14.5：3-射影空間において円柱はトーラスになるのか，それともクラインの壺になるのか？　それは向き付け可能か？　両側か？（図14.9参照.）　□

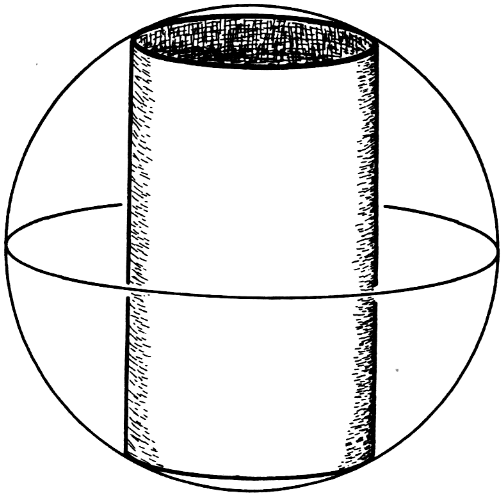


図14.9：3-射影空間において円柱はトーラスになるのか，それともクラインの壺になるのか？

演習問題14.6.：P^3 に埋め込まれた P^2 のコピーを見つけよ．それは向き付け可能か，両側か？　□

15

双曲空間

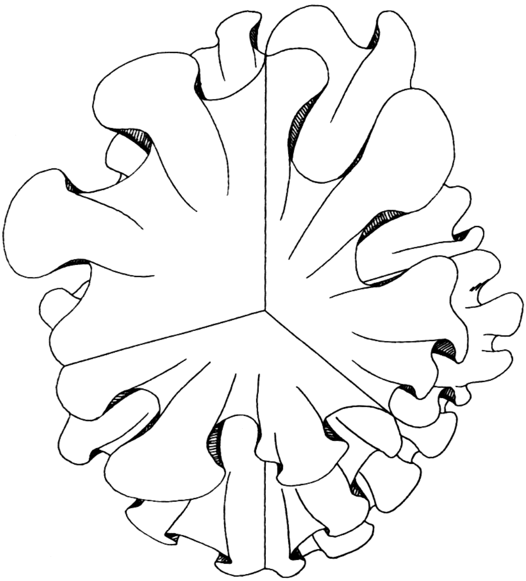


図15.1：双曲空間のあらゆる切口は双曲平面である．

双曲空間とは，次元が１だけ大きい双曲平面のようなものです．実際，ユークリッド空間のあらゆる２次元の切口がユークリッド平面であり，超球面

のあらゆる２次元の切口が２-球面であるのと同じように，双曲空間のあらゆる２次元の切口は双曲平面なのです（図15.1）．双曲空間は等質であり，よく H^3 と略記されます．

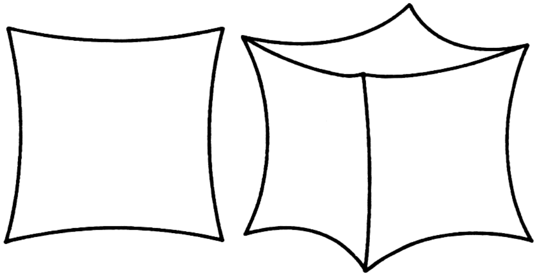


図15.2：双曲平面上の多角形がユークリッド平面上の多角形より小さな角をもつように，双曲空間にある多面体はユークリッド空間にある多面体より小さな角をもつ．注意：ユークリッド平面上に「双曲多角形」を描くとき，角が正しく出るように辺を内側へ曲げるのが普通である．勿論，双曲平面そのものでは多角形の辺は内側に曲がっていない…それらは完全な測地線である．同様に，双曲空間にある多面体を描くとき，たとえ辺が双曲空間そのものでは内側へ曲がっていなくても，辺と隅の角が正しく出るように，辺を内側へ曲げるのが普通である．

H^3 にある多面体はユークリッド空間にある多面体より小さい角をもちます（図15.2）．この事実は，次章である種の３-多様体の等質幾何を求めるとき，非常に重要になります．

図15.3は次第に大きくなる一連の双曲三角形を示しています．より大きい三角形はより小さい角をもっていることに注意して下さい．この図は(標準)双曲平面のどんな三角形も π より大きい面積をもてない理由を幾分なりとも説明しています．もっと大きい面積をもつ三角形を描こうとすれば，三角形の辺が交わらないことがわかります．言い換えると，結局，どの２本も決して交わらない３本のまっ直ぐな測地線となります！　双曲平面にはいくつかの奇妙な性質があります．

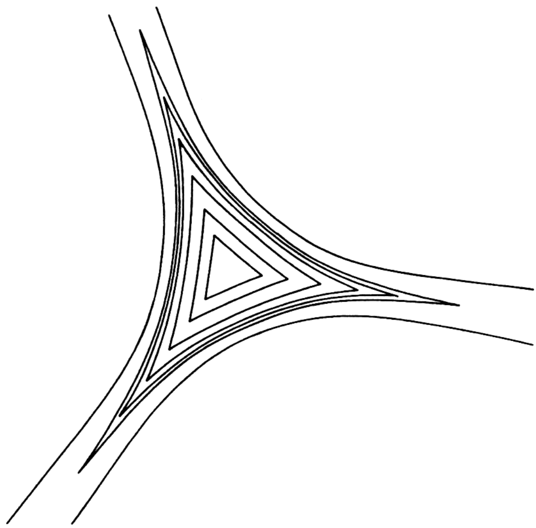


図15.3：ユークリッド平面に表わされた次第に大きくなる一連の双曲三角形．図15.2の説明文で説明しているように，これらの三角形の辺は双曲平面そのものでは実は内側には曲がっていないが，ここに示された角は正しい．

あなたが宇宙外のエイリアンの一行に出会ったとしましょう．そのエイリアンは高度に曲がった双曲宇宙から来て，我々の宇宙にはちょっと立ち寄っただけなのです．彼等は明らかに宇宙間旅行の秘密をよく究めています．双曲宇宙はどうしたことかユークリッド宇宙よりも広々としていると聞いていますから，あなたは一緒に彼等の所へ連れて帰ってほしい，とそのエイリアンに頼みます．彼等は願いを入れてくれます．あなたが彼等の宇宙に到着して遠く離れた銀河の空を見ます．あなたの眼に届く光は当然きれいなまっ直ぐな測地線を通って来ますが，双曲空間では，測地線は奇妙なことを起こします．光は右眼に届くよりも少し違った角度で左眼に届きます．その銀河に焦点を合わすには，少し寄り目で見なくてはなりません！（図15.4 参照）ほぼユークリッド的な宇宙の視覚データを判断するのに慣れているあなたの頭脳は，寄り目で見なくてはならないので銀河がとても近くにあるに違いない

と判断します．実際，双曲宇宙では，すべてのものがあなたから数メートル以内のところにあるように見えるのです．実際にはとても広々としていても，双曲宇宙はとても窮屈に*見えうる*のです！

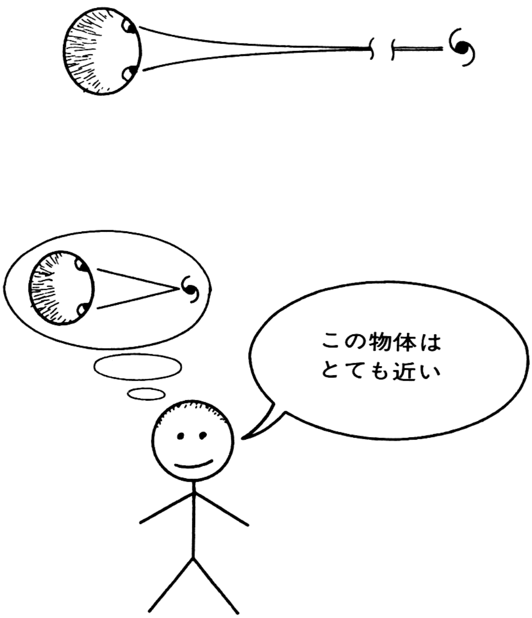


図15.4：両眼の視野に従うと，とても遠い物体が近くに見える．

演習問題15.1． 前節で説明した現象は実際の宇宙では観測されないため，これは，実際の宇宙が H^3 の幾何はもてないということを意味するのか？ □

演習問題15.2． H^3-宇宙は，その住民にどのように見えるだろうか？（ヒント：その宇宙外の生きものに見えるのと同じように彼らに見える必要はない！） □

16

3-多様体上の幾何 I

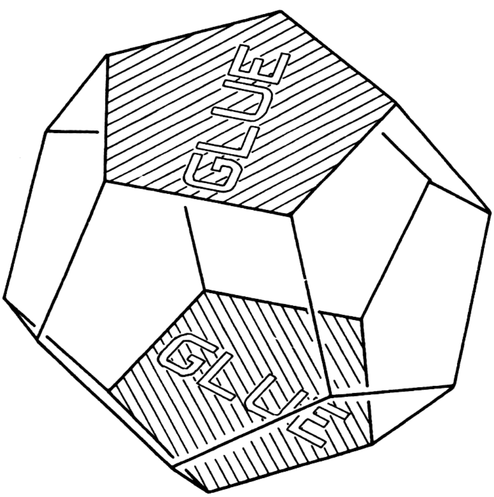


図16.1：Seifert-Weber 空間では，十二面体の各面が時計廻りに3/10回転して相対する面に貼り付けられている．〔技術的に重要な点：時計廻りで上面を底面に貼り付けるということは，反時計廻りで底面を上面に貼り付けるのと同じだと思うかもしれないが，この場合はそうではない．この図を調べれば，（上から見て）時計廻りで上面を下面に貼り付けるのは（下から見て）時計廻りで底面を上面に貼り付けるのと同じになる．このように Seifert-Weber 空間の説明には自己矛盾がない．〕

Seifert-Weber 空間は，相対する面が3/10回転して貼り付けられた十二面体からできています(図16.1)．図11.1の第３の曲面がユークリッド幾何をもてなかったのと本質的に同じ理由で，この３-多様体はユークリッド幾何をもてません．つまり，十二面体の20個の隅は，すべてただ１点に集まり，

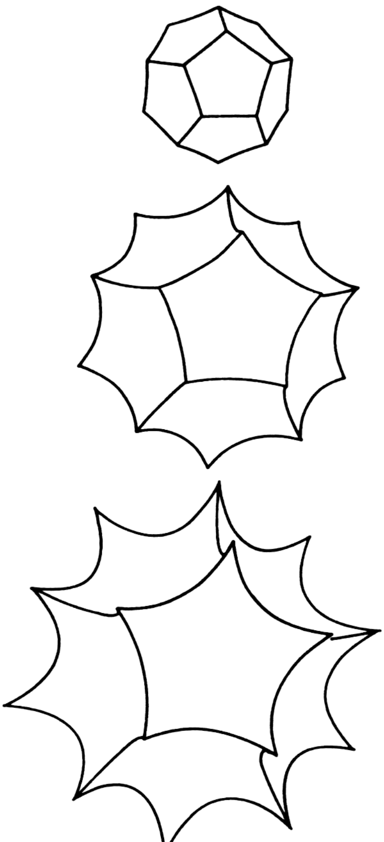


図16.2：双曲空間において，その隅が１点ですべてうまく合うような大きさになるまで十二面体を拡張する．ここで示されている角は正確であるが，双曲空間そのものでは十二面体の面は内側へ曲がっていない．

しかも，あまりにも大きくてうまく合わないのです．その解決法は第11章のものと同じです．十二面体を双曲空間に置き，その隅が互いに合うように細くなるまで拡張します（図16.2）．適当な十二面体から作られたSeifert-Weber 空間は等質な双曲幾何をもっています．

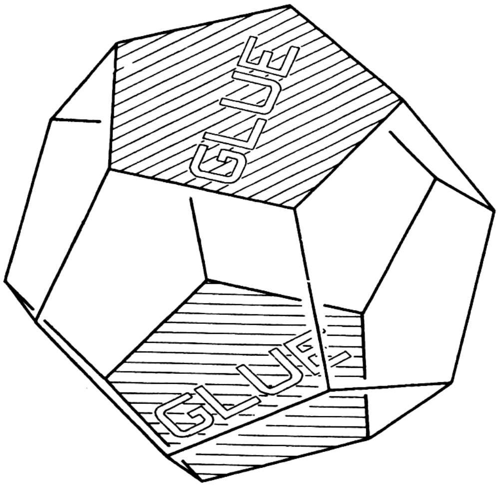


図16.3：Poincaré の十二面体空間では，十二面体のあらゆる面が時計廻りに1/10回転して相対する面に貼り付けられている．

Poincaré の十二面体空間は，相対する面が1/10回転して貼り付けられている十二面体からできています(図16.3)．図11.1の*第1の*曲面がユークリッド幾何をもてなかったのと本質的に同じ理由で，この 3 -多様体はユークリッド幾何をもてません．つまり，十二面体の20個の隅がそれぞれ 4 隅からなる 5 つのグループに集まり，それらが少し細すぎてうまく合わないのです．その解決法は第11章のものと同じです．超球面に十二面体を置き，その隅が合う大きさになるまで拡張します(図16.4)．適当な十二面体からできた Poincaré の十二面体空間は超球面の等質幾何（すなわち，3 次元楕円幾何）をもっています．

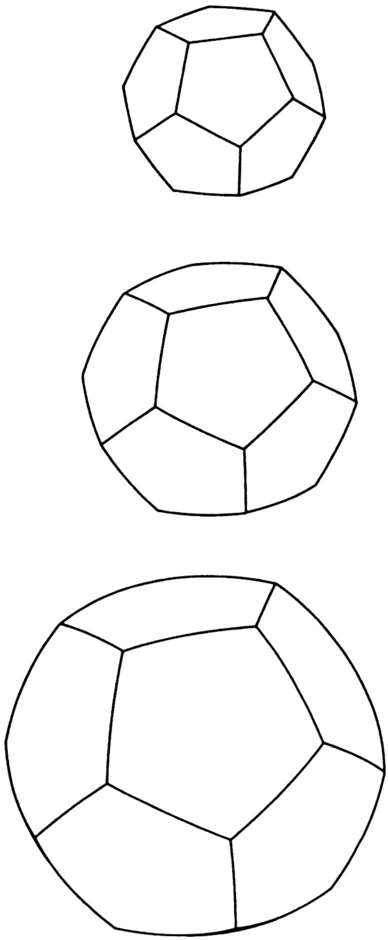


図16.4：3-球面において隅が4個からなるグループになって合うのに丁度よい大きさになるまで十二面体を拡張する．ここに示された角は正確であるが，3-球面そのものでは十二面体の面は外側には膨らんでいない．

Seifert-Weber 空間も Poincaré の十二面体空間も1933年の C. Weber と H. Seifert の論文：The two dodecahedral spaces (Die beiden Dodekaederräume, Mathematische Zeitschrift, Vol. 37, no. 2, p. 237) に記載さ

れています．Poincaré の十二面体空間は今世紀に変る頃に Poincaré が発見した 3 -多様体と位相的に同じですから，Henri Poincaré に敬意を表わして名付けられています．しかし，Poincaré は自分の多様体が十二面体からできるなどとは知りませんでした！　彼はそれが超球面と共通するある性質，すなわち，同じ「ホモロジー」をもつので興味をもっただけなのです．（彼は 3 -球面のホモロジーをもつ 3 -多様体は 3 -球面だけであると前々から思っていたのです．）

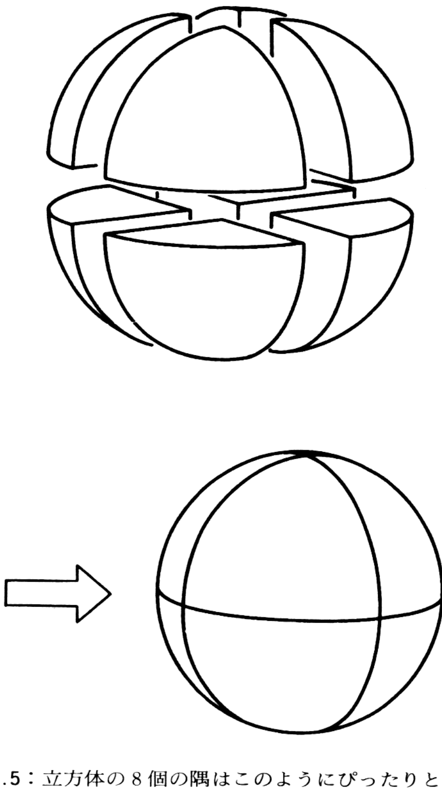


図16.5：立方体の 8 個の隅はこのようにぴったりと合う．

この時点で，3 -トーラスでは立方体の 8 個の隅がすべて 1 点に集まり，それらが完全に合うということに注意しておくのがいいでしょう（図16.5）．こ

ういうわけで，3-トーラスはユークリッド幾何をもつのです．ところで，第7章の他のすべての3-多様体は同じ理由でユークリッド幾何をもちます．

Seifert-Weber 空間は3次元双曲幾何を，Poincaré の十二面体空間は3次元楕円幾何を，3-トーラスは3次元ユークリッド幾何をそれぞれもつことを見てきました．あらゆる3-多様体がこれら3種の幾何の1つをもつのであればいいのですが，実際の状況はそう単純ではありません．例えば $S^2 \times S^1$ は，たった今述べた3種のものとは異なる等質幾何をもっています．この状況がより詳しく理解できるようになったのは，ほんのこの10年間のことです．第18章では，わかっていること，またあるいは，推測できることを説明します．第17章では，第18章で必要になる例を準備します．第19章では，3-多様体について，いま読者の知っていることについて図解しながら宇宙の性質を論じます．第19章は第17，18章に無関係ですから，読みたければ直ちに読めます．

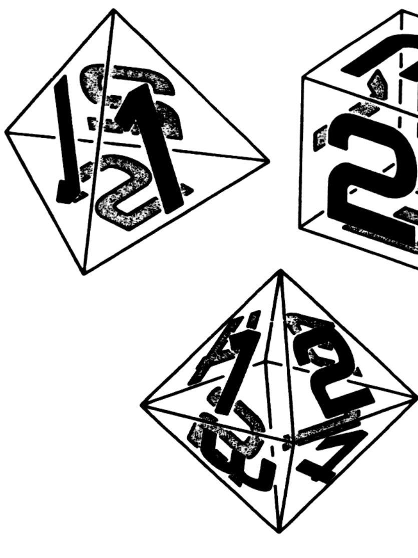


図16.6：演習問題16.1，16.2，16.3のための多様体

演習問題16.1. 図16.6(a)に指示されているように，面を貼り付けた四面体からできている3-多様体を考える．この四面体の隅はどのようにして合うのか，すなわち，それぞれいくつの隅からなるいくつのグループとなるか？(ヒント：1つの隅より始めて1つの面を通ることにより，他の3つの隅のどれに到達できるかを見ること．)うまく合うためには，隅は拡張しなければならないか，それとも縮小しなければならないか？　この多様体はどんな等質幾何をもつか？　□

演習問題16.2. **四元数多様体**とは，各面を時計廻りに1/4回転して相対する面に貼り付けた立方体のことである(図16.6(b))．この立方体の隅はどのように合うか？　この多様体はどのような等質幾何をもつか？　ところで，この多様体の奇妙な名称は，その対称性が四元数 ── 複素数に似ているが，ただ1つでなく3つの虚の量をもつ数体系 ── をモデルにもつ事実に由来している．
□

演習問題16.3. **八面体空間**とは，各面を時計廻りに1/6回転して相対する面に貼り付けた八面体のことである(図16.6(c))．八面体空間の等質幾何を求めよ．(この演習問題は前の2問より少し難しい．隅がどのように合うかわかっても，まだそれらが太すぎるか，細すぎるか，丁度いいのか明らかでない．初等的な方法で解けるが，自分やってみなければならない．)　□

17

束

円柱は円からなる区間であり，区間からなる円でもあるので，円柱は区間と円の積（図17.1）です．（積の復習については第6章参照）．

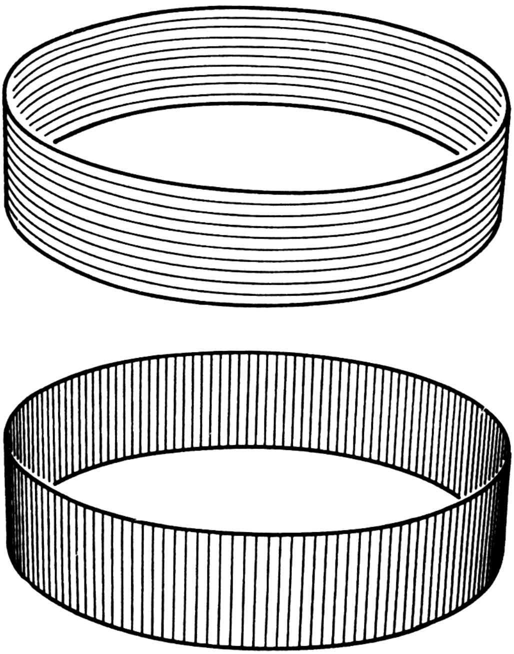


図17.1：円柱は円からなる区間であり，区間からなる円である．

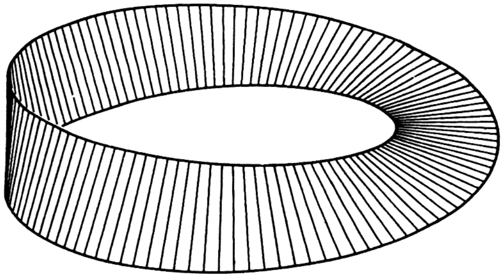


図17.2：メービウスの帯は区間と円のほとんど積である．

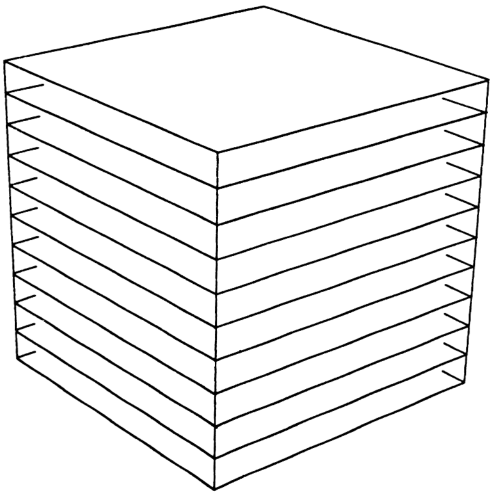


図17.3：立方体の相対する側面は，そのまま貼り付けられているが，上面は1/4回転して底面に貼り付けられている．水平の各層はトーラスをなす．

メービウスの帯も区間からなる円（図17.2）ですが，これは円からなる区間にはなりません．これはほとんど積ですが，全くそうとも言えません．したがって，円上の区間の束と考えてもいいでしょう．一般に，円上の*束*とは，積になっていてもいなくても，円状に滑らかに並べられたものの束です．例えば，演習問題7.3の1/4回転多様体は，円上のトーラス束になります．図17.3は1/4回転多様体の構成法の復習です．立方体の前後，左右の面はそのまま貼

り付けられていますが，上面は1/4回転して底面に貼り付けられています．図17.4は多様体の大域位相を理解するのに役立つでしょう．第7章のすべての平坦な3-多様体は円上のトーラス束（S^1 上の T^2-束）か，円上のクラインの壺束（S^1 上のK^2-束）です．

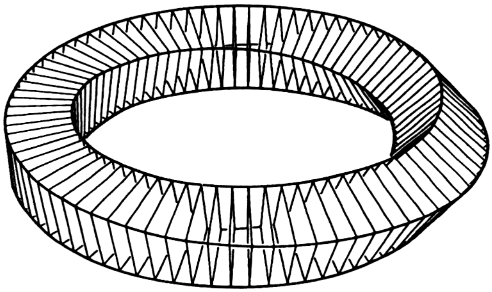


図17.4：立方体の上面を1/4回転して底面に物理的に貼り付けると，このような立体ができる．厳密には，この立体は4回巻き付いた唯1つの側面をもつ．しかし，局所的には4つの側面をもつ．もし各側面を相対する側面に貼り付ければ，各正方形の断面はトーラスに変わる．位相的には1/4回転したトーラスの円である1/4回転多様体を得る．この1/4回転は多様体の大域的性質であり，任意の特別な断面と何の関係もないことに注意せよ．この例をメービウスの帯と比較せよ．厳密には，メービウスの帯は2回巻き付いた1つの縁をもつが，局所的には2つの縁をもつ．メービウスの帯の相対する縁を貼り付けると，どういう曲面が得られるか？

演習問題17.1．演習問題7.13で紹介した1/3回転多様体は円上の（六角形）トーラス束である．図17.4の1/4回転多様体の図に似たその図を描け．1/6回転多様体についても同様に描け． □

1/4回転多様体，1/3回転多様体，1/6回転多様体は，それぞれ図17.4のように，3次元空間にあるトーラスからなる円として表わすことができます．一方，立方体あるいはプリズムの上面を下面に左右を逆にして貼り付けるときは，3次元空間で物理的に貼り付けても図17.4のような図は得られません．この束をもう少し抽象的に理解するには，図17.3のような図に戻らねばなりません．

演習問題17.2. $K^2\times S^1$ は S^1 上の T^2-束であり，S^1 上の K^2-束でもある．トーラスからなる円として表わす図とクラインの壺からなる円として表わす図を描け．その図は図17.4より図17.3に似ているはずである．(K^2-束については，図17.4に似た図を描けるが，T^2-束については描けない．)図17.5は $K^2\times S^1$ の構成法の復習である．

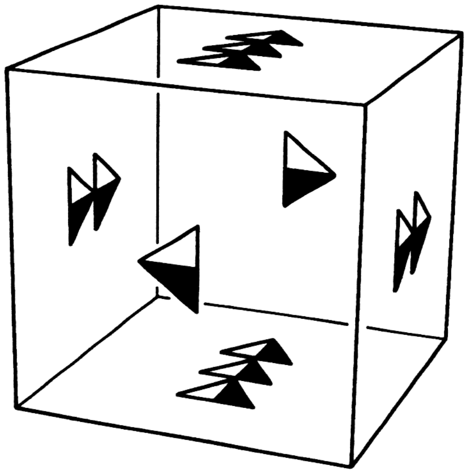


図17.5：$K^2\times S^1$ を構成するには，立方体の上面を底面に，左の面を右の面に，そのまま貼り付けるが，前面は後面に左右を逆にして貼り付ける．

演習問題17.3. 相対する辺を貼り付けた八角形は，位相的には，２穴ドーナツ曲面である（図17.6）．したがって，八角形のプリズム（図17.7）の相対する側面を貼り付けると，２穴ドーナツ曲面×区間，すなわち，$(T^2\#T^2)\times I$ が得られる．円上の２穴トーラス束を構成するために，プリズムの上面を底面に貼り付ける方法をいくつか記せ． □

次の演習の各々は３次元空間で描くのは難しいですが，貼り付けると，かなり容易に説明できる束を含んでいます．行き詰まれば，解答を見て下さい．

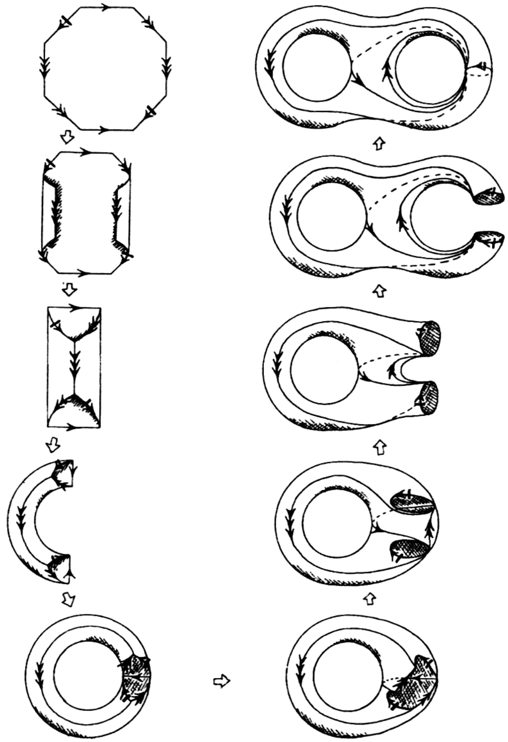


図17.6：もし物理的に八角形の相対する辺を貼り付ければ，２穴ドーナツ曲面が得られる．

演習問題17.4．円上の円の束である曲面を２つ挙げよ．（１つは積であるが，もう１つは積でない．）　□

演習問題17.5．ソリッド(中身の詰まった)ドーナツは位相的には円板×円（$D^2 \times S^1$）である．その表面は位相的にはトーラスである．どのようにして「*ソリッド(中身の詰まった)クラインの壺*」，つまり，境界がクラインの壺である円上の円板束を構成するか説明せよ．

演習問題17.6．S^1 上の S^2 束を構成するために，$S^2 \times I$ を貼り付ける方法を２つ説明せよ．この束の１つ（$S^2 \times S^1$）は向き付け可能である．もう１つは

向き付け不能であり，実は，これはクラインの壺の 3 次元類似物であるから，K^3 と表記する．□

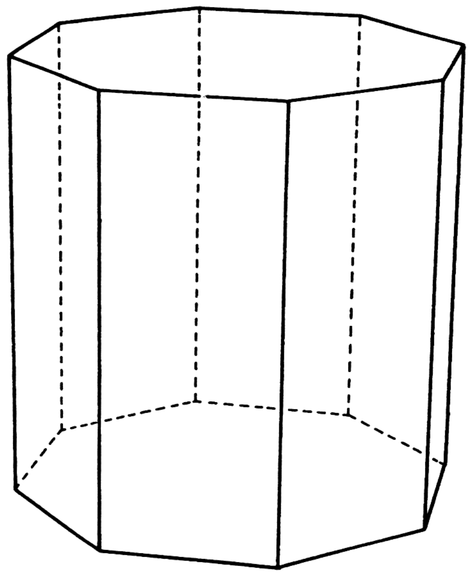


図17.7：相対する側面を貼り付けた八角形プリズムは 2 穴ドーナツ曲面×区間である．

「ソリッド(中身の詰まった)」$S^2 \times S^1$ と「ソリッド(中身の詰まった)」K^3 はどのようなものでしょうか？　ここでは，$S^2 \times S^1$ と K^3 はすでに 3 次元(＝ソリッド)ですから，「ソリッド」と付けて記すことにします．問題の多様体は 4 次元です．恐らく「ハイパーソリッド」とするのがより正確でしょうか？

演習問題17.7．第 7 章の平坦な多様体のどれが S^1 上の K^2 束か？（その章には，それが 4 個潜在している．）　□

これまで，我々は円上の曲面束に専念してきました．これからは興味を違った方向に向け，曲面上の円束をみてみましょう．ここにその簡単な例の構成法があります．

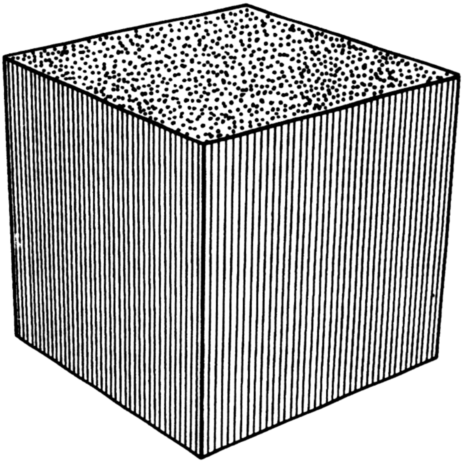


図17.8：端を上下にして立てているスパゲティで一杯の立方体.

沢山のスパゲティを詰めこみ立方体の形にすることから始めます —— スパゲティは図17.8のようにすべて端を上下にして立てています. 数学的に言えば, このようにして区間からなる正方形が得られます. 立方体の上面を底面に貼り付けます. こうすることにより, 内在的にはスパゲティの1本1本は区間から円に変わりますから, これで円からなる正方形が得られます. 立方体の側面を普通に貼り付けて下さい. そうすれば, 円は正方形に並ぶというよりも, トーラス形に並びます. ほら, トーラス上の円束ができましたよ！（基礎にある3-多様体は, 勿論, よく知っている T^3 です.）

演習問題17.8. $T^2 \# T^2$ 上の円束を構成せよ. 八角形プリズムの形に詰め込んだスパゲティから始めよ（図17.7）. その結果, 生まれる3次元多様体は $(T^2 \# T^2) \times S^1$ である. □

曲面上の円束の図を描くとき, 通常, 垂直に立てたスパゲティは描きません —— そのような図は雑然としており, 他に何が起きているのか曖昧になっ

てしまいます．しかし，スパゲティはそこに存在するのです．たとえはっきり説明しなくても，立方体あるいはプリズムの上面は，１本１本のスパゲティを円に変えるために，常に底面に貼り付けられているのです．

次に，トーラス上の異なった円束を考えましょう．図17.8の立方体から始めて，上面を底面に，左の面を右の面にそのまま貼り付けますが，前面は後面に上下を逆にして貼り付けます．このとき，円からなるトーラスが得られますが，円は妙なつながり方をしています．（もし立方体の右の面を通り左の面から戻ると，その円が普通につながっていることに気付きますが，もし後の面を通り前の面から戻ると，裏返してつながっているのに気付きます．）この場合，基礎にある３次元多様体は向き付け不能であり，それは $K^2 \times S^1$ です．

演習問題17.9． クラインの壺上の向き付け可能または向き付け不能な円束の例が見つけられるか？（ヒント：図8.2の多様体は後で役に立つ）． □

さて，本当に奇妙な例があります！ *捩れた*（*３次元*）トーラスと呼ばれる次のトーラス上の円束は３-多様体の幾何の理論（第18章）において重要な役割を果たします．

前と同じように，立方体を考え，勿論，垂直の区間を円に変えるために，上面を底面に貼り付けます．この側面は普通の方法ではなく「剪断変形」（図17.9）で貼り付けます．これは，各々の垂直の円が立方体の相対する面上の

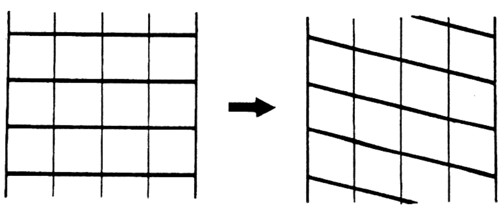


図17.9：剪断変形

対応している垂直の円に貼り付けられることを意味していますが，ただし，水平の線分が傾くように垂直の円を上または下にずらせています．この剪断変形を行なうには，どうしても立方体の上面を底面に貼り付けることが必要なことに注意して下さい．捩れたトーラスを構成するためには，図17.10に描かれているような剪断変形で立方体の相対する側面を貼り付けます．

これはおかしな貼り付け方であり，得られたものが多様体であるかどうかすら全く明らかではありません．次の演習問題はこの(可能性の)問題を扱っています．

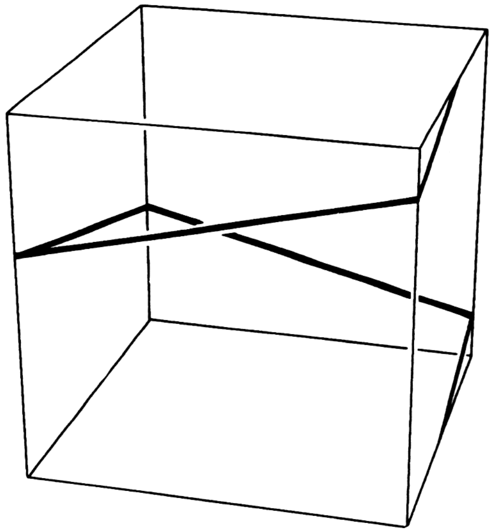


図17.10：捩れたトーラスを構成するために，傾いた線分が合うように剪断変形して立方体の相対する側面を貼り付ける．(注意：右面の明らかに切れて見える線分は，立方体の上面を底面に貼り付けると切れなくなる．)

演習問題17.10．トーラス上に円束を構成しようとするとき，傾いた線が合うように図17.11の立方体の相対する面を貼り付ける．4本の垂直の辺がどのように合うか調べよ．そうすれば問題が1つでてくる．この問題は捩れたトーラスを構成するために4本の辺が合うとき生じるのではないことを確かめよ．結論として，捩れたトーラスはまさしく3-多様体であり，実は T^2 上の円束であることを示せ．　□

したがって，捩れたトーラスは正当な 3 -多様体なのです．しかし，本当に何か新しいものなのでしょうか．それとも，単におなじみの T^3 のゆがんだものを表わしているだけなのでしょうか？　もし捩れたトーラスにおける何んらかの意味で水平な断面を探すことを試みると，この多様体は絶対に T^3 ではないとたちまち確信できるようになります．

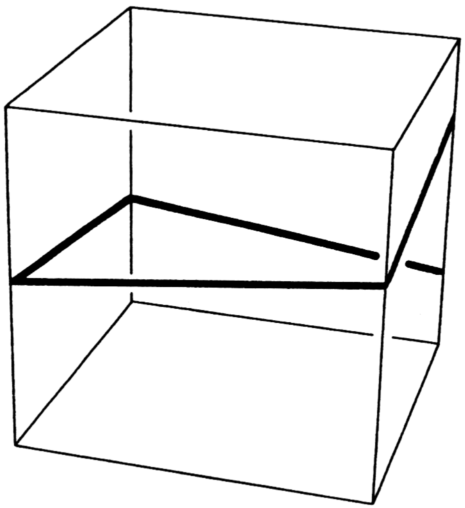


図17.11：相対する側面が捩れたトーラスの半分だけ剪断変形して貼り付けられている．

演習問題17.11. 上述の捩れたトーラスを 2 倍捩った，トーラス上の円束を構成せよ． □

演習問題17.12. $T^2 \# T^2$ 上の捩れた円束を構成せよ． □

演習問題17.13. T^2 上の円束として捩れたトーラスを構成したが，それはまた円上の T^2-束になっているか？ □

18

3-多様体上の幾何 II

第11章では，あらゆる曲面は3種の2次元等質幾何のうち1つをもつことを知りました．球面と射影平面は楕円幾何を，トーラスとクラインの壺はユークリッド幾何を，そして他のすべての曲面は双曲幾何をもちます．第14, 15, 16章では，類似の3次元幾何を議論し，それらをもつ3-多様体の例をいくつか見つけました．閉3-多様体の研究において更に5種の等質幾何が生まれることもわかります．その1つは $S^2 \times E$ の局所幾何です．($S^2 \times E$, $S^2 \times I$, $S^2 \times S^1$ はすべて同じ局所幾何をもちます．$S^2 \times E$ はそれをもつ「最大の」多様体ですから，伝統的に $S^2 \times E$ にちなんでその幾何を名付けるのです．）この幾何は等質ですが等方的ではありません．いたるところで同じですから等質なのです．しかし，与えられた任意の点で，ある方向と他の方向の区別ができるので，等方的ではありません．図6.10から $S^2 \times S^1$ の断面には球面もあり，平坦なトーラスもあることを思い出して下さい．局所的には2次元の切口には正の曲率をもつものもあり，零曲率をもつものもあることがわかります(図18.1)．**断面曲率**という用語は多様体の2次元の切口の曲率を意味します．断面 (section) という単語は (多かれ少なかれ)「切口」を意味するラテン語 sectio に由来しています．このように，$S^2 \times S^1$ は水平方向では正の断面曲率をもちますが，任意の垂直な切口では零断面曲率をもちます．等方幾何はすべての方向で同じ断面曲率をもちます．3次元楕円幾何の断面曲率はす

べて正，３次元ユークリッド幾何の断面曲率はすべて零，３次元双曲幾何の断面曲率はすべて負なのです．

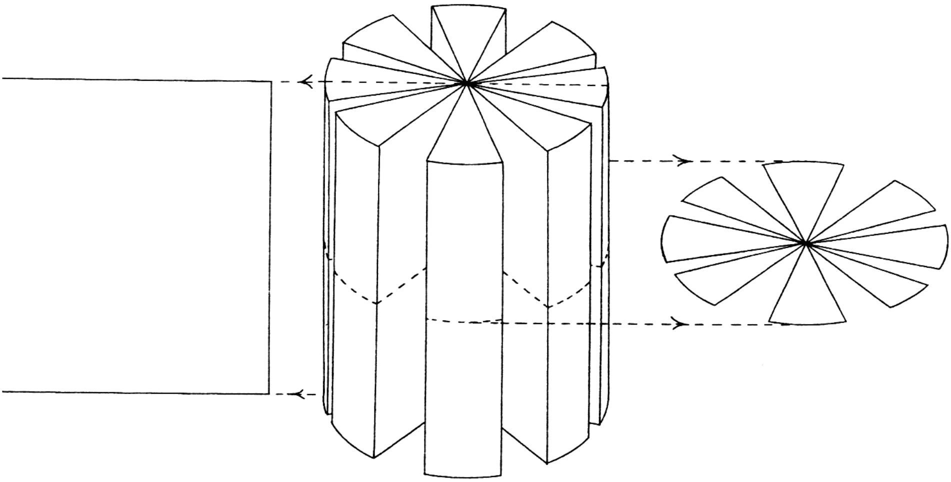


図18.1：$S^2 \times S^1$ の垂直断面はユークリッド幾何をもつが，水平断面は楕円幾何をもつ．$S^2 \times S^1$ の１片は，伸ばすことができなければ，ユークリッド空間で垂直に裂けるが水平には裂けない．

演習問題18.1．演習問題 6.7では，$P^2 \times S^1$ が $S^2 \times E$ 幾何をもつことを見つけた．この幾何をもつ向き付け不能な多様体をもう１つ挙げよ．(ヒント：これは第17章で初めて出てくる．) □

$H^2 \times E$ の幾何も等質ですが等方的ではありません．$S^2 \times E$ と同じように，$H^2 \times E$ は異なった方向で異なった断面曲率をもちます．垂直の切口は零曲率をもちますが，水平な切口は負の曲率をもちます．図18.2は $H^2 \times E$ 幾何の大雑把な説明です．

演習問題18.2．$H^2 \times E$ 幾何をもつ多様体をいくつか挙げよ． □

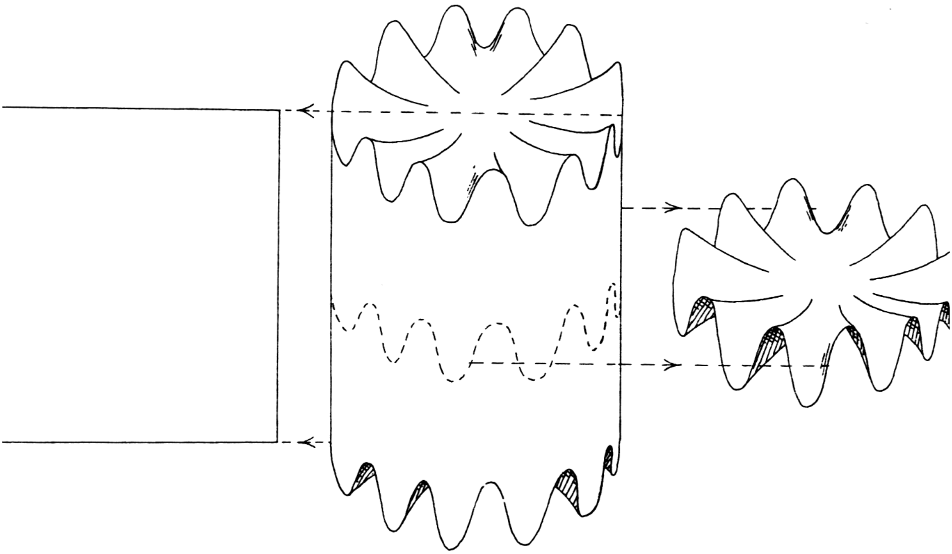


図18.2：$H^2 \times S^1$ の垂直断面はユークリッド幾何をもつが水平断面は双曲幾何をもつ．ところで，水平な切口は，しわが寄っている次元とは異なる次元では実際には積み重なっているはずであるが，この図は利用できる３次元では最良の図である．

ちなみに，２次元等質幾何は楕円，ユークリッド，双曲幾何だけであり，その各々はたまたま等方的であることも注意しておくべきです．等質であるが等方的ではない幾何は３次元以上の多様体にのみ起こるのです．

３-多様体の現代の理論は等方性に関係なく，等質幾何だけを扱っています．等方性は，現在の観測データに従えば等方的に見える真の宇宙の研究に数学理論を適用するときにのみ重要になるのです．本章では，一般に等質幾何を探求します．等方的幾何の宇宙論への応用については第19章で扱います．

８個の等質幾何の表に移る前に，二，三の専門的な要点を整理しておきます．

専門的な要点　第1：本章で「幾何」と言う場合は，実は「幾何の族（クラス）」を意味する．

例えば，半径3の2-球面の幾何は厳密に言えば，半径17の2-球面の幾何とは異なっています．しかし，それらはよく似ているので，2次元幾何の同じ族（クラス）に含めていいのです．3次元幾何は各族（クラス）の中でもっと多くの変形をもちます．本章の後半で，この例を見てみましょう．

専門的な要点　第2：本当は，等質幾何には8個より多くの族（クラス）がある．

実際には，無限に多くあります．大切なことは，そのうちのほんの8個だけが閉3-多様体の等質幾何として起こるという点です．（もう気付いたことでしょうが，本書は閉多様体をひどく偏重しているのです！）

以下にあるのは，8種の等質幾何とそれをもつ多様体の実例の表（リスト）です．

(1)　**楕円幾何**　S^3 の幾何．

楕円多様体の実例：3-球面，3-射影空間，Poincaré の十二面体空間．

(2)　**ユークリッド幾何**　幼時期の幾何．

ユークリッド多様体の完全な表（リスト）：位相的に異なるユークリッド3-多様体は全部で10個しかない！　そのうちの6個は向き付け可能であり，4個は向き付け不能である．向き付け不能なものは，$K^2 \times S^1$ と演習問題 7.4の3個の多様体であり，すべて S^1 上の K^2-束である．向き付け可能なユークリッド多様体は3-トーラス，1/4回転多様体，半回転多様体，1/6回転多様体，1/3回転多様体，および，まだ見たことのないもう1つの多様体である．六角形3-トーラスは位相的に通常の3-トーラスと同じであるから，ここには含まれていない．

(3) **双曲幾何**　説明は第15章参照.

双曲多様体の実例：双曲幾何は多少不可解である．これまで双曲幾何をもつ3-多様体は唯一つ，すなわちSeifert-Weber十二面体空間を見てきただけである．しかし，Bill Thurstonによる最近の研究は，2次元双曲幾何が曲面の最も普通な幾何であるように，3次元双曲幾何は3-多様体の全く最も普通な幾何であることを示唆している．もし双曲幾何がそれほど普通のものならば，どうして双曲幾何をもつ3-多様体にもっと多く出合わなかったのか？その理由は，最も研究し易い多様体は典型的なものではなくて，むしろ特殊な対称性をもつものであるということにある．我々が幾何を見つけた最初の曲面は，2つの最も単純なもの，すなわち，球面とトーラスである．その等質幾何（それぞれ楕円とユークリッド）は，まさにそれらの曲面が全く単純であるために，非典型的(アティピカル)なのである．第11章で初めて，ほとんどの曲面は双曲幾何をもつことがわかった．これと同じ現象は3-多様体の研究にも現われる．あらゆる単純な多様体はその単純性によって，非典型的(アティピカル)の幾何をもつ．双曲幾何をもつのは —— そう単純ではないが —— 典型的な多様体である．

(4) $S^2 \times E$ **幾何**　この幾何は第6章，および，本章の最初で述べている．

$S^2 \times E$ **多様体の完全な表(リスト)**：この幾何をもつ多様体は4個しかない．これらは，$S^2 \times S^1$，K^3，$P^2 \times S^1$，および，もう1つの多様体である．この最後の多様体は$S^2 \times I$からできたものであるが，この場合，各縁は自分自身とのみ貼り付けられている！　特に，1つの縁の各点は，*その同じ縁*の対心点に貼り付けられている．つまり，貼り付け方は球体をP^3に変えるときに用いた貼り付け方に似ている．$S^2 \times I$の内在的幾何はその結果生じる「継ぎ目」でうまく適合していることに注意する．わかりにくければ，円柱の各縁の対心点を貼り付けるときに，その幾何がどのように適合するか考えてみよ．

演習問題18.3. 4個の $S^2 \times E$ 多様体のうち，どれが向き付け可能か？ □

(5) **$H^2 \times E$ 幾何** この幾何は本章の初めで議論している．

$H^2 \times E$ 多様体の実例：これは $S^2 \times E$ の場合よりも少し変化に富んでいる．まず初めに，任意の 曲面×円 は，その曲面が S^2，P^2，T^2，K^2 でない限り，$H^2 \times E$ 幾何をもつ．他の多くの束も同様である．例えば，$H^2 \times E$ 幾何をもつ $(T^2 \# T^2)$-束を構成するには，まず図17.7で説明した 2穴ドーナツ曲面×区間 から始め，1/8回転，1/4回転，3/8回転，半回転，または2つの可能な鏡映の1つで上面を底面に貼り付ける．

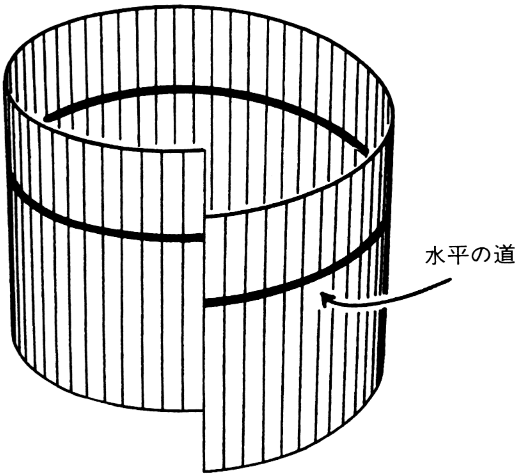


図18.3：捩れたユークリッド多様体で水平に進むと，出発したところより上か下の地点に戻る．

(6) **捩れたユークリッド幾何** 図17.8はユークリッド幾何を垂直な直線の束として図示したものである．すなわち，ユークリッド空間は $E^2 \times E$ と考える．捩れたユークリッド幾何もまた垂直な直線の束と考えられる．ただし，ここでは，直線は奇妙な新しい方法で束ねられている．もし，捩れたユークリッド多様体で旅をし，常に「水平」に――「水平」とは垂直な線に直角という意味――進むならば，出発した直線に戻るとき，出発点の少し上か下に戻っていることに気が付く(図18.3を参照)．もし反時計廻りに進むと出発点より上に，時計廻りに行くと下に戻る．出発点の上か下かの正確な距離は通る路が囲む面積に比例する．

図18.4は捩れたユークリッド多様体のジャングルジムを示している．すべての棒は同じ長さであり，すべて直角で交わる．通常のユークリッド空間で描くには，捩れたユークリッド・ジャングルジムを変形しなければならないので，傾いているように*見える*棒もある．

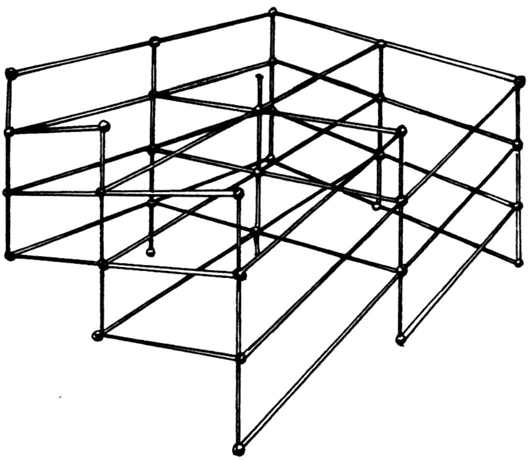


図18.4：捩れたユークリッド多様体におけるジャングルジム（Bill Thurston の図）

捩れたユークリッド多様体の実例：第17章の捩れたトーラスには捩れたユークリッド幾何を与えることができる．まず，捩れたユークリッド幾何を図17.10の立方体に与える．この新しい幾何により，立方体の側面上の前出の傾いた線は内在的に水平になる．この立方体の相対する側面を剪断変形で貼り付けると１つの面の垂直線をもう１つの面の垂直線に，１つの面の水平線をもう１つの面の水平線に貼り付けたことになる．このようにして，捩れたユークリッド幾何により，「剪断変形」もまた他の何の変ったこともせずに，１つの側面をもう１つの側面に厳密に貼り付けていることになる．隅も辺も依然としてうまく合うので，捩れたトーラスに捩れたユークリッド幾何を与えたことになる．

演習問題 17.11 の２重に捩れたトーラスも捩れたユークリッド幾何をもつ．事実，トーラスあるいはクラインの壺上の*あらゆる*円束はユークリッド幾何あるいは捩れたユークリッド幾何をもつ．

演習問題18.4．向き付け不能な３-多様体は捩れたユークリッド幾何をもつか？ □

(7) **捩れた $\boldsymbol{H^2\times E}$ 幾何**　この幾何は，捩れたユークリッド幾何が標準ユークリッド幾何に対してもつのと同じ関係を標準 $H^2\times E$ 幾何に対してもつ．特に，捩れた $H^2\times E$ 幾何と標準 $H^2\times E$ 幾何のいずれも H^2 上の垂直な線束と考える．捩れている場合，直線は図18.3のようにつながっている．

捩れた $\boldsymbol{H^2\times E}$ 多様体の実例：S^2，P^2，T^2，K^2 以外の任意の曲面上の任意の円束は標準 $H^2\times E$ 幾何か捩れた $H^2\times E$ 幾何をもつ．

演習問題18.5．捩れた $H^2\times E$ 多様体の実例を構成するための具体的な指示を与えよ． □

（捩れた $S^2 \times E$ 幾何）　驚いたことに，$S^2 \times E$ を適量に捩れば，楕円幾何が得られる！　この捩りの量は，面積 x の地域の廻りを水平に旅する旅人が出発地点の x 単位下の地点に戻るときのものである（ただし，$S^2 \times E$ は*単位* 2-球面上の束と仮定する）．捩りの量が適当でなくても，その対称性を表わす群が 3-球面の対称性を表わす群に含まれているから，この幾何は専門的注意第 1 により，楕円幾何として分類される．しかし，垂直な線を伸ばしたり，縮めたりして常に正しい値にまで捩りを調整できることに注意する．

(8)　**solve 幾何**　これはことに奇妙なものである．これまでの幾何と異なり，solve 幾何は回転対称でない．これを理解するための内在的なよい方法については筆者は何も知らない．〔「solve」幾何という名称は solvable（可解）Lie 群と関係がある．〕

solve 多様体の実例：S^1 上のほとんどのトーラス束は solve 幾何をもつ．（けれども，これまで本書で見てきたものは，どれも 2 次元断面の幾何をゆがめないから，solve 幾何をもたない．）

あらゆる 3-多様体が上述した等質幾何の 1 つをもつと素晴らしいのですが，そうではないのです．例えば，2 つの 3-多様体の連結和は ―― (a) 元の多様体の 1 つが S^3 であるか，または (b) 元の多様体のいずれも P^3 であるか，でなければ ―― *決して*等質幾何をもた*ない*のです．幸いにも状況はそれほど悪くはありません．Thurston の研究は「ほとんどの 3-多様体は双曲幾何をもち，双曲幾何をもたないものは他の 7 種の等質幾何の 1 つをもつか，あるいは等質幾何をもつ断片に切り開くことができる」ということを示唆しています．（この状況で，「多様体を断片に切り開く」とは，球面に沿って切る ―― 事実上，連結和を元に戻す ―― こと，および，トーラスに沿って切ることを意味する．）　3-多様体をこのように考えることはまだ正しいと証明されていませんが，それを正当付ける沢山の実証があります．その実証の要

約としてThurstonの論文：Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bulletin of AMS **6**(1982), pp. 357-381を一読して下さい．「無作為に選んだ」3-多様体は連結和になりそうもない，というのがThurstonのアイディアの興味ある帰結です．

第IV部　宇　宙

19

宇宙

この宇宙が存在するようになって，まだわずか100億年経過したにすぎません．宇宙は非常に熱く，稠密で収縮した状態で始まり，それ以後はずっと膨張し続けています．本章では，宇宙の始まり（いわゆる大爆発（ビッグバン）），続いて起こった膨張，宇宙の形状，宇宙がいつの日か再崩壊するかどうか，あるいは永久に膨張し続けるかどうかという問題について議論します．実験的な物証は宇宙が等方的であると示唆しています．もし宇宙が楕円幾何をもつならばいつか崩壊するし，双曲幾何をもつならば永久に膨張し続けます．また，その幾何がユークリッド的であれば永久に膨張するけれど，それはほんのわずか（膨張の割合が零に近づく）でしょう．現在の実証は，宇宙は双曲幾何をもち，永久に膨張すると示唆していますが，本当のことは誰にもわかりません．

本章は次の５つの疑問に関して構成されています：

1．宇宙について何がわかっているのか？

2．どういう意味で宇宙は膨張しているのか？

3．宇宙の幾何は，宇宙が再崩壊するかどうか，とどういう関係があるのか？

4．宇宙は閉か開か？　言い換えれば，空間は有限か無限か？

5．大爆発（ビッグバン）の前に何があったのか？

質問第1：宇宙について何がわかっているのか？

我々は，太陽の廻りを軌道を描いて回る（少なくとも）9個の惑星の1つである地球に住んでいます．太陽は我々銀河系「天の川」の約1000億の他の星々と共に群れをなしています．「天の川」は直径5万ないし10万光年の巨大な円板のような形[3]で，我々は中心から約2万5千光年位の所に居ます．もし晴れた月のない夜に外へ出れば，我々銀河系の星は，空をめぐる斑点のある白い帯（したがって，天の川という名がある）として見えるでしょう．通常，あなたに見える他の星もすべて我々銀河系にあるのです．

この宇宙には，他にも沢山の，少なくとも数十億個の銀河があります．そのなかにはぽつんと離れているものもありますが，ほとんどのものはそれぞれ数個から数千個の銀河の群れの状態になっています．平均すれば，銀河は大体10セント硬貨を1メートルずつ離して置いたように空間に散在しているのです．

これらの銀河のその他の著しい特徴は，それらが我々から離れて行っているということです！　更に，それらが退行する速度は我々からの距離に正比例しています：

$$(\text{退行速度})=(H)(\text{距離}).$$

この事実は**Hubble の法則**と呼ばれ，比例定数 H は1920年代に宇宙の膨張を発見した Edwin Hubble に敬意を表して **Hubble 定数**と名付けられています．（1917年に，Einstein の一般相対性理論は宇宙の膨張を予言しましたが，このアイディアは非常に反直観的なので，Einstein 自身でさえ受け入れられませんでした．）何年にもわたって何回も修正の加わった Hubble 定数は現在では100万光年につき15～30（km/秒）に近い値であると考えられています．したがって，例えば，2,000万光年離れている銀河は，(20)×(15～30)＝300～600km/秒で我々から退行しているはずです．Hubble 定数がほんのおお

注3　1光年とは1年で光が動く距離である．例えば，太陽の光は我々に到達するのに8分位かかるので，太陽は8光分離れている．同様に，月は約1光秒離れている．サンディエゴはボストンから約0.02光秒離れている．

よそでしかわからないのは，非常に離れた銀河までの距離は測定しにくいからなのです．一方，銀河の退行速度は，その銀河からの光のスペクトル線がどのように「赤色偏移」するかを見れば正確に決定できます．詳細はBerryのPrinciples of Cosmology and Gravitation（宇宙の原理と引力），あるいはその他ほとんどどんな天文学の書物でもいいですから参照して下さい．

他の銀河が我々から離れて行っているという事実は，最初，推理するように，我々が宇宙で何か特別な位置を占めているということを意味している，のではありません．これら他の銀河も互いに離れて行っているのです．これについては質問第2にさらに詳しく書いてあります．

銀河がすべて互いに離れて行っているという事実は，過去にはもっと近かったに違いないということを意味します．もし現在の速度で銀河が常に離れて来たとすれば，約100億年から200億年前にはそれらは同じ場所から出発したことになるのでしょう！　実際は，それら相互の引力は動きを減速するので，過去に溯れば溯るほど銀河は速く退行していました．宇宙の物質はすべて100億年あるいは200億年前より最近の方が一層離れ飛び去っているというのがその結論です！　これが大爆発（ビッグバン）であり，80億年から180億年前のいつかに起こった宇宙の始まりでした．

大爆発（ビッグバン）後の最初の100万年位の間は，宇宙の物質はとても熱く，原子が形成されてもほとんど直ちに粉々に砕かれてしまいました．しかし，放射線はとても豊富でした．理論的によく考えれば，この放射線が今なお宇宙を充たしていることがわかります．実際，1965年にPenziasとWilsonは，この「マイクロ波背景放射線」を発見しました．大爆発（ビッグバン）というアイディアは既に1965年に受け入れられていましたが，この「化石放射線」の研究により物理学者は初期の宇宙をそれまでよりもずっと詳しく理解できるようになったのです．現在では，ほとんどの天文学者が，我々の宇宙は等質かつ等方的であると信じています．これらの用語を更に順序立てて説明しましょう：

等質性．これはこの宇宙の任意の2つの領域は基本的に同じであるという意味です．勿論，銀河の個数の「局所的な」変動が平均化するように十分，大規模に眺めなければなりません．この状況は，部屋一杯の空気は，たとえ1立方マイクロセンチメートルに窒素17分子，酸素4分子を含み，一方，別の1立方マイクロセンチメートルに窒素8分子，酸素11分子を含むとしても，等質であるということに類似しています．

等方性．これはあなたが宇宙のどこにいても，ものは基本的にあらゆる方向で同じに見えることを意味します．等方的宇宙は必然的に等質です．(任意の2つの位置A,Bで条件は同じであることを見るには，宇宙はAとBの中間にある点についても等方的であることに注意する．)美的な理由でも，また銀河の分布とHubble定数の値について観測された大体の等方性によっても，実在の宇宙は等方的である——したがって，等質である——と長い間考えられてきています．もっと最近では，マイクロ波背景放射線が1パーセントの何分の1かの範囲内で等方的であると測定されており，等方性の仮説に対する更に大きな支持にもなっています．勿論，遠い銀河から見て，宇宙が等方的であるとはまだ*わかって*いませんが，他の誰ももたないときに，我々だけが等方的な有利な地点をもっているなんてありそうには思えません．(細かい点が心配な人は，一般相対性理論によれば，宇宙の零——あるいは少なくとも等方的な——圧力の仮定と共にHubble定数の等方性は空間の幾何も等方的であることを意味するのだとわかれば安心するでしょう．)

前述の実証によって，宇宙物理学者と数学者が等質かつ等方的である3-多様体に非常に重点を置く理由の説明がつきます．幸いなことに，我々に考えられる等質かつ等方的な幾何で異なるものはただ3種，すなわち，楕円，ユークリッド，双曲幾何だけなのです．勿論，それぞれの幾何をもつ3-多様体は異なるものが数多くあり，したがって，宇宙の大域位相には数多くの可能性があります．

演習問題19.1. もしある銀河が n 100万光年離れているならば，Hubble の法則によれば，Hn km/秒の割合で我々から退行する．もし，この速度で常に動いてきたとすれば，その銀河が我々を離れてからの時間を次のように計算できる．

時間＝(動いた距離)/割合

＝(n 百万光年)/(Hn km/秒)

＝1/H(百万光年)(秒)/km.

この時間は，**Hubble の時間**として知られており，すでに本書で指摘したように，銀河はそれ自身の重力のブレーキ効果によってどんどん速度が落ちていくので，これは宇宙の年を少々過大評価している．3倍離れている銀河は3倍の速さで我々から退行しているので，この Hubble の時間が銀河までの距離に依らないのは驚くべきことではない．光の速度が300,000 km/秒であるとして，Hubble の時間を年で計算せよ．まず，Hubble 定数を15(km/秒)/(百万光年)であると仮定し，次にそれが30(km/秒)/(百万光年)と仮定せよ．

□

質問第2：どういう意味で宇宙は膨張しているのか？

図19.1は，この質問に対する誤まった答えを図解しています．大爆発(ビッグバン)はすでに存在している空間に爆発する巨大な花火のようなものでは*ありません*でした．大爆発(ビッグバン)に中心はなかったのです．

図19.2は，この質問に対する正しい答えを図解しています．空間自身は大爆発(ビッグバン)直後はとても小さく，それ以前には存在すらしていなかったのです！ それぞれの銀河は他のすべての銀河が自分から遠ざかるのが見えることに注意して下さい．実際，この図から2倍離れている銀河は2倍速く退行している，と推論できます．したがって，Hubble の法則を「証明」しています．

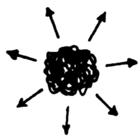
3-トーラス宇宙の膨張は図19.3で示されています．当然ながら，このアイディアは任意の3-多様体に基づく宇宙にも当てはまります．

大爆発（ビッグバン）の誤まった図

(1) 大爆発（ビッグバン）の瞬間，すべてのものは空間の1点で始まる．



(2) それは空間のあらゆる方向に飛び去っていく．



(3) そして，空間のさらに遠くへ動いて行き続ける銀河をいずれ構成する．

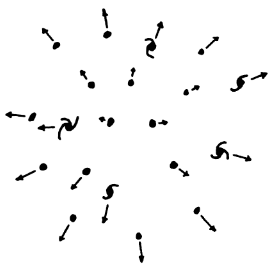


図19.1

たびたび生じる1つの疑問は，もし，あらゆるもの —— 家，人々，原子，巻尺，すべてのもの —— が膨張するのであれば，そもそも，ものが変化したなどとどうして言えるのかというものです．その答えは，あらゆるものが膨張するとは限らない，ということです．家，人々，原子，巻尺は膨張してはいません．惑星，星，銀河でさえも膨張してはいません．空間が膨張しているのであり，銀河間の距離も膨張していますが，それだけなのです．

大爆発(ビッグバン)の正しい図
(2次元宇宙による図解)

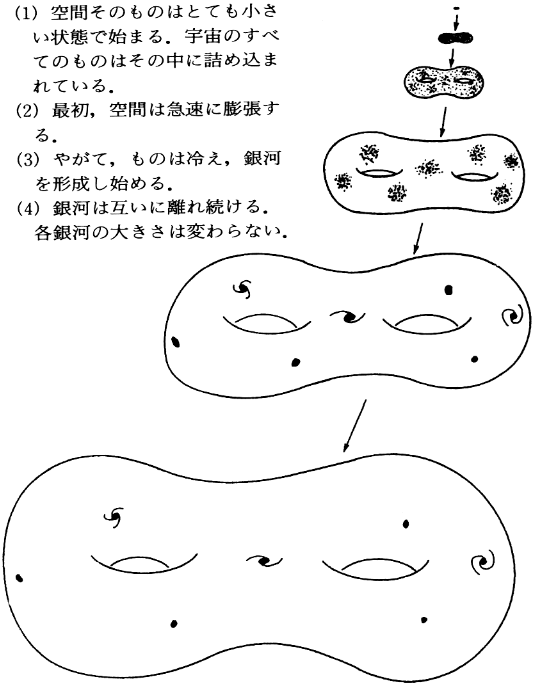
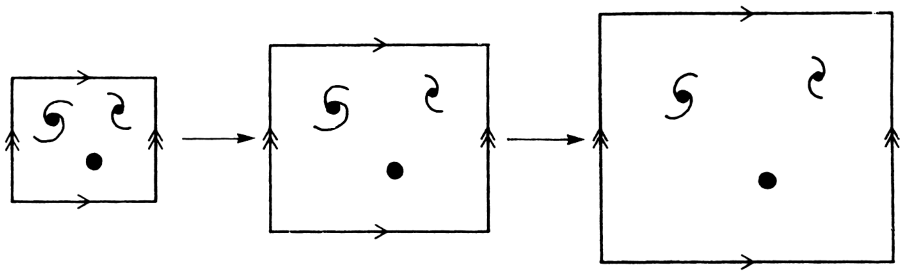


図19.2

もう1つは，もし宇宙が無限の容積をもつ(すなわち，開3-多様体である)とすれば，宇宙はどのように膨張し，また，いくらでも大きくなるのかという疑問です．その解答は，全容積は増加するのではなく，閉宇宙と同じ様に，銀河はそれでも互いに*離れて*行くということです．無限宇宙の膨張は*局所的には*有限宇宙の膨張と同一なのです．(例えば，図19.3を無限宇宙で膨張する空間の塊と解釈し直せます.) 無限に膨張する宇宙の全容積を考えるときに起こる難しさは，宇宙の動きに関する難しさではなく無限の概念に関する難しさなのです．

Flatland 人の描いた膨張する T^2-宇宙.



ホモ・サピエンスの描いた膨張する T^3-宇宙：

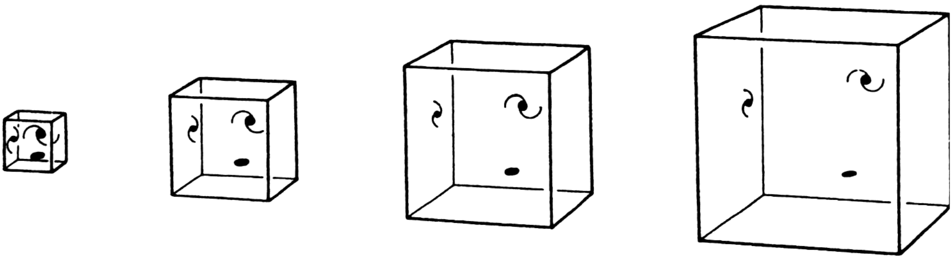


図19.3：比較せよ

質問第3：宇宙の幾何は，宇宙が再崩壊するかどうか，とどういう関係があるのか？

まず，この質問に対する専門的な解答を考えて，次にその解答の一部を解釈しましょう．

一般相対性理論の場の方程式を3つの等質かつ等方的幾何のそれぞれに適用します．（一般相対性理論は，宇宙の局所幾何のみに関係しています．大域位相は無関係なのです．）場の方程式は，楕円幾何の場合，宇宙はいずれは崩壊する，と予測します．双曲幾何の場合，宇宙は永久に膨張し徐々に膨張の割合は一定の値に近づく，と予測します．境界線のユークリッド幾何の場合，宇宙は永久に膨張するが，それはわずかである（膨張率は零に近づく），と予測します．

更に，場の方程式は宇宙のものの密度 ρ と Hubble 定数 H との関係も予測します．密度 ρ は楕円宇宙においては $(3/(8\pi G))H^2$ より大きく，ユークリッド宇宙においては $(3/(8\pi G))H^2$ に等しく，双曲宇宙においては $(3/(8\pi G))H^2$ より小さいのです（ただし $G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}$ 秒$^2)$ は自然の定数，いわゆる「重力の定数」です）．次の表はこれらの事実を要約しています．（最後の欄については質問第 4 で議論します．）

宇宙のための幾何

宇宙の幾何	宇宙の運命	宇宙の密度	宇宙の容積
楕円	いずれ崩壊	密集 $\rho>\frac{3}{8\pi G}H^2$	有限（閉）
ユークリッド	永久に膨張（ほんの少し）	境界線 $\rho=\frac{3}{8\pi G}H^2$	有限あるいは無限（閉あるいは開）
双曲	永久に膨張	まばら $\rho<\frac{3}{8\pi G}H^2$	有限あるいは無限（閉あるいは開）

宇宙の幾何と宇宙の終局の運命との間のこの驚くべき単純な関係について，直観的な説明を私はもち合わせていません．（もしあなたがこのことについて何か知っていれば，できる限り早く手紙を下さい．）しかし，H と ρ の関係が宇宙の運命とどんな関係にあるのかもう少しだけ述べることができます．Hubble 定数 H は，銀河が互いに離れていく割合を示しています．密度 ρ は，どれ位のもの —— したがって，どれ位の引力 —— が膨張をゆるめるために存在するのか示しています．もし ρ が大きいか，H が小さければ，引力が強くなって銀河はゆっくりと動きを止め，ついで互いに引っ張り戻し始めます．この場合，宇宙は図19.4のように再崩壊するのです．一方，もし ρ が小さいか，あるいは H が大きければ，銀河の動きがあまり大きすぎて，比較的弱い引力にも打ち勝つことができず，宇宙は永遠に膨張し続けます．（最初，引力は銀河に重大なブレーキ効果を及ぼしますが，いずれ銀河は十分に離れ

合い，重力が最小になり，膨張の割合が安定します.）最後に $\rho=(3/(8\pi G))H^2$ の場合，銀河は引力に打ち勝つだけの速さで離れて行きますが，それはほんのわずかで，全く静止することなく速度がゆるみ続けるのです.

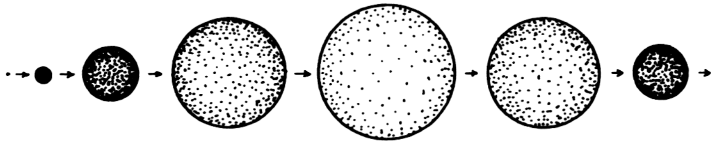


図19.4：再崩壊する 2 次元球状宇宙.

これらのアイディアを研究するのは，真の宇宙を理解したいからなのです.私の意見では，宇宙が楕円幾何をもち再崩壊する運命にあるのか，あるいは，双曲幾何をもち，永久に膨張する運命なのかどうかという疑問は，本書で取り挙げた 2 つの最も魅力ある問題の 1 つなのです.（もう 1 つの疑問は宇宙の大域位相についてです.）本章の初めにも述べたように，宇宙の運命がどうなるのかまだ我々にはわかっていませんが，少なくとも量的な言葉で，この質問を言い換えることができます．宇宙物理学者は，数 Ω（オメガと読む）を，宇宙のものの実際の密度を「臨界密度」で割ったもの

$$\Omega=\frac{\rho}{\left(\frac{3}{8\pi G}\right)H^2}$$

として定義します.したがって，$\Omega>1$ ならば $\rho>(3/(8\pi G))H^2$ であり，我々は再び崩壊するであろう楕円宇宙に住んでいることになります．同様に，もし $\Omega<1$ ならば $\rho<(3/(8\pi G))H^2$ であり，我々は永久に膨張する双曲宇宙に住んでいることになります.もし $\Omega=1$ ならば境界線のユークリッド宇宙に住んでいることになります．1 つの無難な評価は $0.02<\Omega<4$ と置くことでしょう．この値は全く正しいようではありますが，明らかに，そう大して情報を与えてくれません.もう少し大胆な予測は $0.1<\Omega<0.3$ と置くことでしょう．この予測は——いつか誤まりだと証明されるかもしれませんが

—— 宇宙は双曲幾何をもち，永久に膨張することを示唆しています．そして，もし何かでたらめな推測をしてもよいならば，大抵の閉 3 -多様体は双曲幾何をもつという前章で提示された考え方に，双曲宇宙はよく合っているということを付け加えておきたいのです．

質問第 4：宇宙は閉か開か？　言い換えると，空間は有限か無限か？

簡単に言えば，わからないのです．

しかし，もし宇宙が楕円幾何をもつならば，閉に間違いないことがわかります．一方，もし宇宙がユークリッド幾何あるいは双曲幾何をもつならば，閉か開のいずれかなのです．次の表は異なった種類の宇宙に対するいくつかの位相の実例を示しています．

宇宙の大域位相の可能性

	楕円幾何	ユークリッド幾何	双曲幾何
閉	S^3，P^3 Poincaré の 十二面体空間	T^3， 1/4回転多様体， 1/6回転多様体	Seifert-Weber 空間 「ほとんどの」 閉 3-多様体 (第18章参照)
開	なし	E^3，$T^2 \times E$， $E^2 \times S^1$	H^3 (他の可能性も ある)

残念ながら，閉双曲 3 -多様体の多くの例は天文学者にはほとんど知られていません．天文学についての著書で —— 誤まって —— 双曲（負に曲がる）宇宙は開で*なければならない*と述べているのに往々にして出会うことがあります．この誤解に基づいて生じた用語は特に困るのです．天文学の文献では，「閉」は「楕円」（正に曲がる）を，「開」は「ユークリッドあるいは双曲」（＝平坦あるいは負に曲がる）を意味するのに用いられています．また，この用語は閉双曲宇宙ということを述べることすら不可能にしています．

質問第５：大爆発(ビッグバン)の前に何があったのか？

サグレド：大爆発(ビッグバン)の前に何があったのですか？

サルビアチ：何んにもありませんでした．

サグレド：そのとき，空間は全く空っぽだったというのですか？

サルビアチ：いいえ，空間すら存在しなかったのです！

サグレド：ああ，わかりました．大爆発(ビッグバン)の前はただの空間も存在しなかったのですね．何と変な考え方でしょう．

サルビアチ：それ以上に悪いのです．大爆発(ビッグバン)の「前」は時間さえなかったのです！

サグレド：何だって！　時間がない！　ものも空間も存在しなくても，きっと時間は存在したでしょう．

サルビアチ：図を描かせて下さい．図13.8にやや似た**時空図**があります．ただし，その図は，２次元の平らな宇宙というよりも，１次元の円状の宇宙の図となるのです．この円状の宇宙が常に同じ大きさであれば，その時空図は図19.5(a)のように円柱となります．一方，もしそれが膨張し続ける円状の宇宙ならば，その時空図は図19.5(b)のように錐体となります．

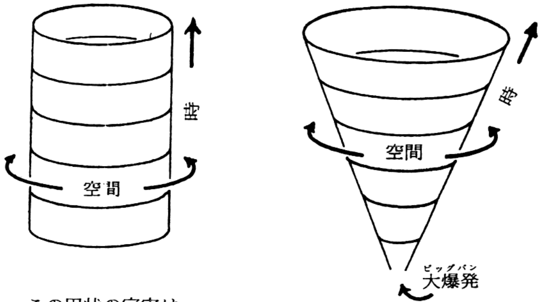
　これらの図の趣旨は，空間と時間がからみ合って統一した**時空**になっているということです．だから，空間のないところには時間は存在せず，その逆も真なのです．つけ加えると，Einstein の相対性理論はこのように空間と時間を我々が考えるのを許すだけでなく，実際に我々に考えさせているのです．

サグレド：わかりました．時空は*すべての*もの，*すべての*空間，*すべての*時間，要するに，物理的実在の*すべて*を含むのですね．

サルビアチ：そうです．

サグレド：そしてあらゆる物理的実在は大爆発(ビッグバン)の*後に*生じるのですね．

サルビアチ：全くその通りです．



この円状の宇宙は
同じ大きさのままである.

この円状の宇宙は
膨張する.

図19.5：円状の宇宙の時空図 (a)静止状態,(b)膨張状態.

サグレド：では，何が大爆発（ビッグバン）を*引き起こした*のですか？

サルビアチ：何も．

サグレド：何んですって！　何かが引き起こしたに違いないでしょう．

サルビアチ：物理的出来事は他の物理的出来事により引き起こされますが，大爆発（ビッグバン）は物理的出来事ではないので，原因はいらないのです．

サグレド：しかし，大爆発（ビッグバン）は図19.5(b)の時空図のように見えますから，物理的出来事になるのではありませんか？

サルビアチ：すみません——もっと早く説明しておくべきでしたね．君の言う時空図は頂点のない錐体なのです．だから厳密に言うと，*大爆発（ビッグバン）は存在しない*のです．ただ，その後に出来事があるだけなのです．あらゆる出来事は，その前の出来事により引き起こされますが，最小の正の数がないのと同じように最初の出来事もないのです．

サグレド：それでは，何が時空を引き起こしたのですか？

サルビアチ：それは難しい質問ですね！　私自身にも何んのアイディアもありません．実際，その質問が意義があるものかどうかすら確かではありません．しかし，宇宙の根源として神を想定したいなら

ば，相対性理論によって，神がただ大爆発（ビッグバン）だけ，というよりもむしろ全体としての時空を引き起こしたと想像すべきでしょうね。

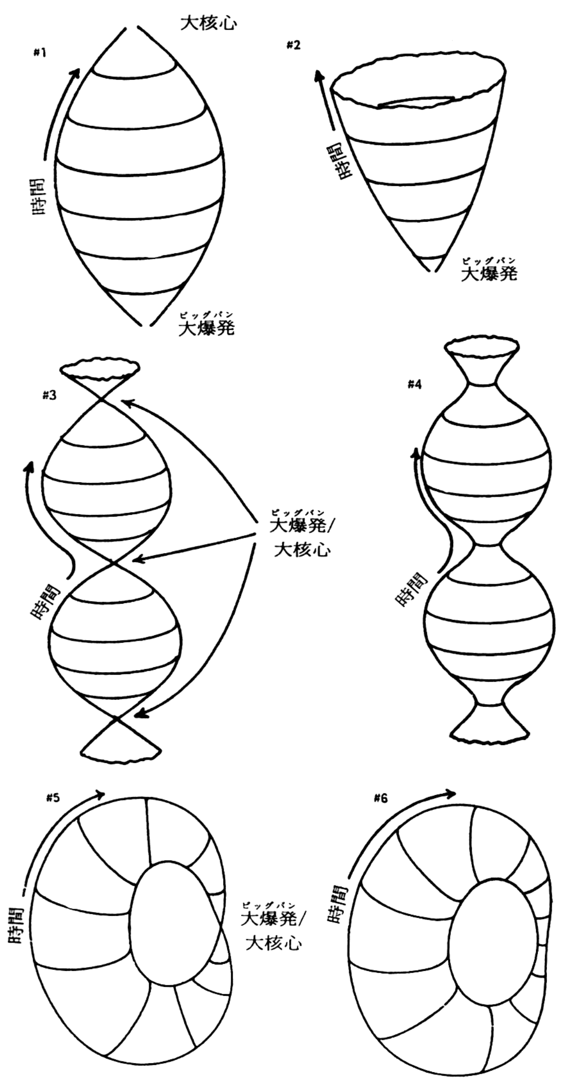


図19.6：宇宙の異なるモデル

サグレド：君は神が過去と未来を同時に創り給うたというのですね？

サルビアチ：それが私の考え方です．もっとも，「同時に」というのは誤解を与える言葉の用い方ですけどね．神は，空間に位置をもたないように，時間を経験することもないのです．神は時空の外にいなくてはならないのでしょうし，時空の外にいるとは，空間*と時間*の外にいることを意味します．

サグレド：それは確かに，神は空間の創造者であるにもかかわらず，我々と全く同じ時間の中に住むという伝統的な考え方からの転換ですね．サルビアチ，もしかまわなければ，こんな神学的な論考はさておいて，もう１つ質問があるのだけど．

サルビアチ：どうぞ．

サグレド：君の大爆発（ビッグバン）についての説明が正しいとどうしてわかるのですか？

サルビアチ：わかりませんよ！　大爆発（ビッグバン）の*性質*は，たとえその*存在*が圧倒的な実証で支持されても，大いに考察の対象になりますよ．

サグレド：大爆発（ビッグバン）に関して，対立するいくつかの説明について話してもらえますか？

サルビアチ：いいですよ．図19.6で，それぞれが宇宙の異なる図であるいくつかの時空図をスケッチしてみました．図＃1は「標準的な」再崩壊する宇宙，図＃2は「標準的な」永久に膨張し続ける宇宙を描いています．図＃3と＃4は振動する宇宙を描いています――１つは，各周期の終りに宇宙が１点まで崩壊し，もう１つは，そこまで行くまでに「はずむ」のです．最後に，図＃5と＃6は，「大核心」が大爆発（ビッグバン）の原因となる周期的な宇宙を描いています．

サグレド：これらのモデルのどれが最も正しそうなのか，物理学の法則でわからないのですか？

サルビアチ：残念ながらわかりません．大爆発（ビッグバン）の直後，最初の瞬間（ジリオン）[4]に奇妙な事が起きたのです．温度，圧力，密度は巨大でした．恐らく限りなく巨大だったのでしょう．こういう状況では，重力は量子的性質を帯びますが，我々はまだ重力の量子論はもち合わせていないのです．だから，大爆発（ビッグバン）に近い時間に宇宙がどのようであったのか確信をもって言えません．だから，我々はこれといって根拠のない憶測で満足しなければなりません．

サ グ レ ド：では，君の描く図（すなわち，図19.6の図＃1と＃2）をなぜ擁護するのか教えて下さい．

サルビアチ：これはEinsteinの一般相対性理論によって示唆された最も単純な図だと思っています．この対立する図が主として訴えるところは，時間には始めも終りもないという今まで大切に育ててきた概念を手放す必要のない点です．しかし，これらのうち，他の図はその他の厄介なことを導入しています――すなわち，大爆発（ビッグバン）を表わす点（図＃3と＃5）を解釈するか，または，なぜ宇宙が「はずむ」か（図＃4と＃6）理由を解説しなくてはなりません．私自身は，時間は有限かもしれないという事実の方を受け入れたいのです．

注4　この場合，ジリオンとは約10^{-43}秒．

演習問題解答

（2章）

2.2．×は最底列の真中の枡を取れば勝てる．○は左下隅の枡を取れば勝つ．

2.3．d，f，h の配置と同様，配置 a，b，c，e，g はすべて同値である．配置 c はすべてを1目下に動かして，a より得られる．配置 g はすべてを左に1目動かして a より得られる．配置 b は，すべてを1目下と左に1目動かして a より得られる．配置 e は a を1/4回転して得られる．配置 f は d を1/2回転して（あるいは，下と右に動かして）得られる．h は，すべてを右に1目動かして f より得られる

2.4．要するに，先手の可能な手は1つしかない：どこへ行こうと，上へまたは右へ盤を移動して中央にくるようにできる．後手はすぐ横か対角線上の2つの手が可能である．最善手では先手が常に勝てる．

2.5．白のナイトはビショップ，キング，2個のナイトに利いている．一方，ルーク，ビショップ，ナイトは白のナイトに利いている．

2.6．白のナイトと白のクイーンはいずれもすべての黒の駒に利いている．

2.8．左下の隅．（まず上に1枡，次に右に1枡行くとせよ．）

2.9．普通のチェスと同じ考えではできない：ビショップは同色の枡の駒に利いているだけであり，ナイトは反対色の枡の駒に利いている．

2.10．壁を通して見ると，その部屋の別のコピーのようにみえるものが見える．後ろからは自分自身が見える．床を通して見ると頭の先が見え，天井を通して見ると足の裏が見える．

2.12．ボールを投げてすばやく振り返る．もし十分に速くできれば打撃練習すらできる．

（3章）

3.1．曲面 a と c は同じ位相をもつ．同様に，b と d，また e, f, g, h は同じ位相をもつ．曲面 h は穴が4個あるように見えるかもしれないが，平らにすると穴は3個だけあるとわかる．g については，変形して交差している所を交差しないようにする必要がある．

3.2．位相的性質を発見した．Flatland を変形してもその性質は変わらない．

3.3．曲面 a, c, d, f は，曲面 b, e と同じように，同じ外来的位相をもつ．最も難かしい部分は，c と f が a と同じであることを見る点である：f の結びついた部分を縮め c に見えるようにし，次に外の輪から内の輪を引っ張り出し，c を a に見えるようにせよ．頑張れ！

3.4．帯を一杯に捩るのではなく，半分捩って貼り付ける．（「メービウスの帯」を得る．）

3.5．紙を丸めて円錐は作れるが，バスケットボールの上に滑らかにおおうことはできない．やってみよ！もしバスケットボールがなければ，誰かの頭を使えばよい．紙，円柱，円錐は同じ内在的幾何をもつが，バスケットボールの内在的幾何は異なる．

3.6．相対する壁を貼り付けた部屋として宇宙を想像する．母銀河は1つの壁の隣りにあり，友人達は真中におり，反対側の壁を越えて探検をする．探検が終ると単に壁

を通れば母銀河に戻っている．

3.7．発見＃1は局所的であり，発見＃2，＃3は大域的である．

3.8．1次元多様体は直線の局所位相をもつ空間である．円は1次元多様体の例である．（事実，円は唯一の「閉」1次元多様体である．）

3.9．この円柱と平面は同じ内在的局所幾何をもつ（が，異なる外来的局所幾何をもつ）．それらは異なる大域位相をもつが，すべての曲面と同じような局所位相をもつ．発見＃2のみが円柱と平面の区別をするかもしれないが，そのときでも円柱上のFlatland人は正確に正しい方向に旅しなくてはならないであろう．

3.10．（あらゆる3-多様体と同じように）それらは同じ局所位相をもち，また同じ局所幾何（すなわち，通常のユークリッド空間のもの），同じ大域位相をもつ．（簡単に一方を他方の正確な形になるように変形できる．）しかし，それら全体の寸法が異なっているという事実は，それらが異なる大域幾何をもつことを意味する．

3.11．その通り．どの点においても，それは通常のユークリッド空間の局所幾何をもつ．

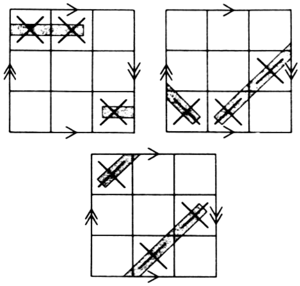
3.12．1，3，4，7，9は閉，2，5，6，8は開．

3.13．彼は自分にぶつかる．

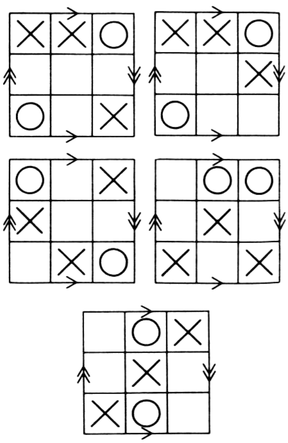
（4章）

4.2．すべてそうである！（右上図参照）

4.3．白のナイトはビショップ，ナイト，ルークに利いており，同じビショップ，ナイト，ルークが白のナイトに利いている．



4.4．あらゆる盤の上で×がすぐに勝てる．次の図を参照せよ．（ついでながら，最初の4枚の盤のそれぞれについて，○には2通りの勝ち方があるから，もし×が○を止めようとすれば，×は負ける．）



4.7．ビショップは左上隅より戻る．

4.8．チェス盤の右側の各枡は左側の同色の枡に隣接している．したがって，ビショップが盤の一方から他方に進めば，異なった色の枡の上に戻る．図4.8のクラインの壺のチェス盤では，あらゆる枡が反対色の枡に隣接しているだけであるから，この現象

はもはや起きない．この新しい盤でナイトとルークは，それでも同時に互いに利いている：中心の丁度上の行にルークを置き，そのナイトを 1 枡横，2 枡下に置け．

4.9．後壁から見ると，部屋が鏡像状態になっているのが見える．他の壁を通して見ると 3-トーラスと同じように，正常な部屋が見える．

4.11．射影平面は向き付け不能である：縁を横切る Flatland 人は左右が入れ変って戻る．

4.12．縁を横切るとき，最も家から遠くにいる．その後再び近付いてくる．

4.13． 2 つの消防署は「90°離して」設置すべきである．例えば，それらは縁では 90°離すか，あるいは，一方が南極で，もう一方のものは縁の上にする．3 つの消防署は，そのうち任意の 2 つが 90°離れるように設置すべきである．こうする 1 つの方法は，南極に 1 つ設置し，あと 2 つを縁で 90°離す．

4.14．射影平面にいるか球面上にいるかを決めるには，Flatland 人は出発点に戻るまで 1 直線上を歩けばよい；射影平面では鏡像として戻るが，球面上はそうではない．この方法では射影平面とクラインの壺の区別はできない．その代りに，2 番目の Flatland 人は三角形の角を測定して，その和が 180°かどうかを見ることができる．

4.15．球面：曲がり，向き付け可能．
トーラス：平坦で，向き付け可能．
クラインの壺：平坦で，向き付け不能．
射影平面：曲がり，向き付け不能．

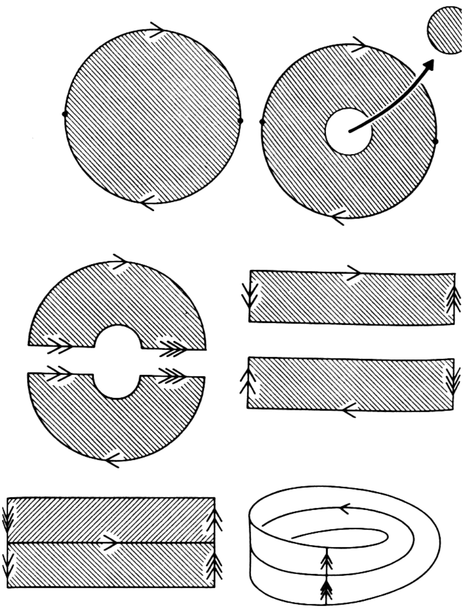
4.16． 3-射影空間は向き付け可能である．もし「継ぎ目」を横切れば180°回転して戻るが鏡像状態ではない．もっと詳しい説明については，図14.8と第14章の対応する節を参照．

4.17．向き付け可能性は，全体として多様体について何か述べているので，大域的性質である．これはまた多様体の形を変形しても何の影響もないので位相的性質でもある．

（5 章）

5.1． 2 穴ドーナツ曲面と 1 穴ドーナツ曲面の連結和は 3 穴ドーナツ曲面である（図5.4のような図が描ける）．同様に， 6 穴ドーナツ曲面と11穴ドーナツ曲面は17穴ドーナツ曲面を形成する．

5.2．任意の曲面と球面の連結和は元と同じ曲面である．その理由は，円板を切り取った球面は位相的に円板であり，したがって，連結和を形成するとき，曲面から 1 つ円板を取り除き，それを異なる円板で置き換えるだけである．



5.3．円板を切り取った射影平面はメービウスの帯である．

5.4．2枚の射影平面の連結和はクラインの壺である．2枚の射影平面より始め，各々から円板を切り取ると（演習問題5.3により）2枚のメービウスの帯が得られる．次にメービウスの帯の縁を貼り付けて（図5.6により）クラインの壺を得る．

5.5．Flatland はトーラスと射影平面の連結和である．安全地域は円板を切り取ったトーラスであり，逆転地域は円板を切り取った射影平面である，メービウスの帯である．

5.6．$(T^2\#T^2)\#S^2=T^2\#T^2$，$K^2\#S^2=K^2$，$P^2\#S^2=P^2$．（一般に任意の曲面 X に対して $X\#S^2=X$．）

5.7．(a) $K^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2$；
(b) $K^2\#T^2=P^2\#P^2\#T^2=T^2\#P^2\#P^2$；
(c) $K^2\#K^2=P^2\#P^2\#P^2\#P^2$．

5.9．演習問題5.8によれば，$T^2\#P^2=K^2\#P^2$ であり，演習問題5.4は $K^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2$ を意味する．

5.10．トーラスと射影平面の連結和として書かれた曲面は常に射影平面のみの連結和として書き換えられる．曲面の大域位相を変えずに（演習問題5.8により）トーラスをクラインの壺に変えることができ，次にクラインの壺を（演習問題5.4により）射影平面に変えることができる．ただし，演習問題5.8は射影平面がないときには適用できないから，トーラスのみからできている曲面は射影平面のみからできている曲面に変えられないことに注意する．（その上，トーラスの連結和と射影平面の連結和は，一方は向き付け可能で，もう一方は違うから，同じではありえないことがわかる．）$T^2\#P^2=K^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2$，$T^2\#K^2=T^2\#P^2\#P^2=K^2\#P^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2\#P^2$，$P^2\#S^2=P^2$，$S^2\#S^2=S^2$．球面およびトーラスの連結和は，すべて向き付け可能であり，射影平面の連結和はすべて向き付け不能である．

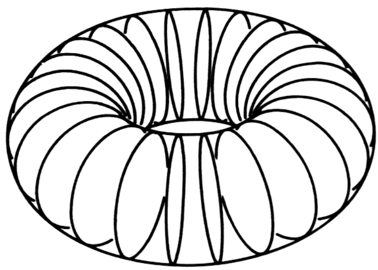
5.11．$T^2\#S^2=T^2$，$K^2=P^2\#P^2$，$S^2\#S^2\#S^2=S^2\#S^2$，$P^2\#T^2=K^2\#P^2$，$K^2\#T^2\#P^2=P^2\#P^2\#P^2\#K^2$．

（6章）

6.1．1．正方形，2．平面，3．無限の円柱，4．無限の帯

6.2．違う：それは区間からなる円であるが円からなる区間ではない．（第17章ではもっと詳しくこの問題について述べる．）

6.3．$D^2\times S^1$ は位相的にソリッド（中身の詰まった）ドーナツである．ここにそれが円板からなる円であることを示す図がある；これはまた円からなる円板であるが，やや描きにくい．



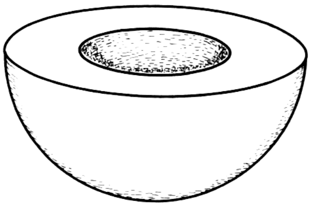
6.4．最初の例では，円はすべて同じ大きさとは限らない．最後の例では，区間がすべて同じ長さとは限らない．中央の例では，円は区間に垂直ではない．

6.5．幾何的な積は完全な正方形である．*任意の*変形した正方形はただ位相的な積にすぎない．

6.6．それは（クラインの壺）×円である（$K^2\times S^1$）．（図6.5の各水平の層は，図6.5の立方体の側面を貼り付けるとき，クライ

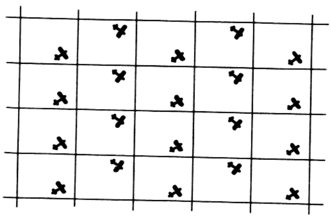
ンの壺になる.）それは，水平のクラインの壺はすべて同じ大きさ，垂直の円はすべて同じ大きさ，かつ，クラインの壺と円は互いに垂直であるから，幾何的な積である.

6.7. $P^2 \times S^1$. $P^2 \times S^1$ は次の図に示すように厚みのある半球面と視ることができる.内側の表面は自明な方法で外側の曲面に貼り付けられ，「縁の曲面」の点は各半球面の層が射影平面になるように貼り付けられている.この多様体は局所的に $S^2 \times S^1$ と同一であるが，その大域位相は異なる.向き付けを逆にする道を見つけられるか？

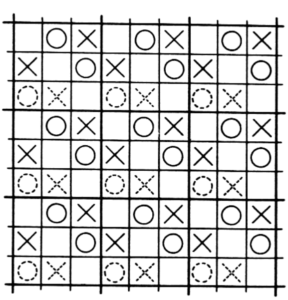


（7章）

7.1.



7.2.



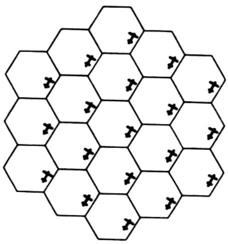
7.3. 1/4回転多様体では立方体の無限の格子のようにみえるものが見える：与えられたレベル上のすべての立方体は同じ色に塗られ，次に高いレベル上の立方体はすべて1/4回転しているように見え，その次のレベル上の立方体は，さらに1/4回転している，….半回転多様体と3/4回転多様体の風景は似ている.1/4回転多様体と3/4回転多様体は互いに鏡像になっている.驚くことに，これらは内在的には区別できない！この理由は，時計廻りと反時計廻りを判断する基準がないからである.この多様体に姿を表わしているのが「正常な自分」か「鏡像」としてかわらないので，時計の針を見ても無駄である.哲学的思考を好む読者はこの問題についてもう少し考えてみたいであろう：問題の核心は，日常の会話で我々は時計廻りとか反時計廻りとか，右とか左とかいう言葉を絶対的に用いているが，本当は，それらは相対的な言葉であり，同じ位置にある1つの対象物を他の対象物と比較するときにのみ用いることができるということである.

7.4. 図7.10：前面は後面に左右を逆にして貼り付け，また上面は下面に左右を逆にして貼り付けるが，左の面は右の面に正常に貼り付ける.図7.11：前面は後面に左右を逆にして貼り付け，上面は底面に前後を逆にして貼り付け，左の面は右の面に正常に貼り付ける.図7.12：前面は後面に左右を逆にして貼り付け，上面は底面に1/2回転して貼り付け，左の面は右の面に正常に貼り付ける.（図7.12において，上面は底面に左右を逆にして，かつ，前後を逆にして貼り付けると言っても，これは1/2回転と同じであるから，正しい.）

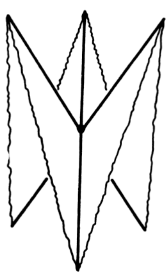
7.5. 演習問題7.3の多様体はすべて向き付

け可能である；そのうちの１つに旅行すると，回転して戻るかもしれないが，鏡像状態では戻らない．演習問題7.4の多様体はすべて向き付け不能である；それぞれにおいて，少くとも１対の面（例えば，前面と後面）が逆にして貼り付けられている．

7.6．もし２機目の複葉機が六角形トーラスで飛び廻ると，勿論，それぞれの六角形の枠の中にもう１度だけ姿を見せる．

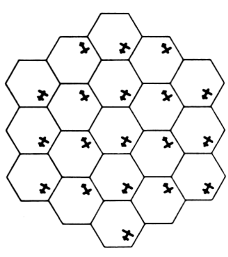


7.7．最初の曲面において六角形の隅は，それぞれ２個の隅のみからなる３つのグループに合う．したがって，その曲面は３個の錐点をもつ．第２の曲面では六角形の隅はそれぞれ３個の隅からなる２つのグループで完全に合う．錐点はない．第３の曲面では六角形の６個の隅はただ１点で合う！逆錐点を得る：頂点を囲む角が少なすぎるのではなく多すぎる．



逆錐点

7.8．どれも違う．



7.9．曲面は六角形クラインの壺．

7.10．六角形トーラスと通常の平坦トーラスは（あらゆる曲面と同じように）同じ局所位相，（いずれも平坦な）同じ局所幾何，（いずれもドーナツ曲面に変形できる）同じ大域位相をもつ．他方，演習問題7.6の画像のパターンで実証されているように，それらは異なる大域幾何の性質をもつ．

7.11．第２の曲面のみ平坦とみなされる．第１のものは錐点により失格，第３のものは逆錐点により失格である．

7.12．六角形３-トーラスと通常の３-トーラスは同じ局所幾何をもつ；どちらも平坦，すなわち，どちらも通常のユークリッド空間と同じ局所幾何をもつ．それらはどちらも トーラス×円 であるから，同じ大域位相をもつ．(一方は 六角形×円 であり，他方は通常の 平坦なトーラス×円 であるが，これらは位相的な相違ではなく，幾何的な相違である)．その大域幾何は今述べた理由で異なる．六角形３-トーラスで眺めてみると，自分の写し（コピー）が層になって並んでいるのが見える；各層が六角形の格子を形成している．

7.13．自分の写し（コピー）が層になって並んでいるのが見え，六角形３-トーラスにおけるように各層はやはり，六角形の格子である．今度は各層の自分の写しは下の層の写しに関して1/3（あるいは1/6）回転している．

（８章）

8.1．(1)　トーラス，向き付け可能，両側．
(2)　クラインの壺，向き付け不能，両側．
(3)　トーラス，向き付け可能，単側．
(4)　クラインの壺，向き付け不能，単側．

8.2．側性は，その曲面がどのように３-多様体に埋め込まれているかと関係しているので，曲面の外来的性質である．(特殊な例

として，図8.2の第１と第３の図のトーラスは，一方が両側で他方が単側でも，内在的には同一であることに注意する.）向き付け可能性は，その曲面に住む Flatland 人にはそれが向き付け可能かどうかわかるので，内在的性質である．クラインの壺はすべて向き付け不能であるが，単側のもの（例えば図8.2の最後の図）も両側のもの（例えば図8.2の第２の図）もある．

8.3．図8.2の第２の図の両側クラインの壺の（前から後へいく）中央の帯を用いよ．

（９章）

9.1．第１の三角形：面積$=\pi/2$，角の和$=3\pi/2$．第２の三角形：面積$=\pi/6$，角の和$=7\pi/6$．第３の三角形：面積$=2\pi/3$，角の和$=5\pi/3$．第４の三角形：面積$=\pi$，角の和$=2\pi$．第５の三角形：面積$=\pi/2$，角の和$=3\pi/2$．第６の三角形：面積$=2\pi$，角の和$=3\pi$．面積と角の和を関係付ける公式は後ほど本書に出る．

9.2．第１の三角形の角の和は$\pi/2+\pi/3+\pi/4=13\pi/12$，したがって，その面積は$13\pi/12-\pi=\pi/12$．第２の三角形については $\pi/180$ を掛けて度をラジアンに変えなければならない．面積は$A=(1.065+1.082+1.100)-\pi=3.247-3.142=0.105$．（計算上の注意：角が度で与えられているとき，ラジアンに変える前に角の和から180°を引く方が能率的な場合が多い．したがって，この問題では，まず$(61°+62°+63°)-180°=6°$ を計算し，次に $6°$ をラジアンに変えて，$6°\times(\pi/180)=0.105$ となる.）

9.3．*直接方法*：本書で公式$A=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ を導き出した方法を少し修正して半径 $2, 3, r$ の球面に適用せよ．弓形二角形の面積に対する正しい公式を求めることから始めて，そこから計算せよ．半径 r の球面上の三角形に対する最終結果は$A=r^2((\alpha+\beta+\gamma)-\pi)$ となるはずである．
巧妙な方法：半径１の球面上の三角形を考える．さて，因子２だけ球面を拡張し，三角形をそれと共に拡張する．三角形の角は変わらないが，その面積は（その高さも辺も２倍になるから）因子４だけ増加する．一般に因子 r だけ球面の半径を拡張するとき，三角形の面積は全球面の面積と同じように因子 r^2 だけ増加する．言い換えれば，半径 r の球面上の三角形は半径１の球面上の同様な三角形の面積の r^2 倍である．したがって，その面積の公式は$A=r^2((\alpha+\beta+\gamma)-\pi)$ となる．

9.4．その畑の面積は

$$A=r^2((\alpha+\beta+\gamma)-\pi)$$
$$=(1000\mathrm{m})^2((0.76138+1.48567+0.89483)-3.14159)$$
$$=(1000000\mathrm{m}^2)(0.00029)=290\mathrm{m}^2.$$

５桁の有効数字で始めるが，引き算の後は２桁しか残らない！　したがって，数パーセントの範囲内でのみ答えは正しいことがわかる．元のデータが有効数字３桁しかなければどういうことになるか？

9.5．球面の半径を求めるために

$$A=r^2((\alpha+\beta+\gamma)-\pi)$$

に代入して $r=10{,}000\mathrm{m}$ となる．したがって，球面の面積は

$$A=4\pi r^2=1.2\times10^9\mathrm{m}^2.$$

9.6．(1) $\pi+2\times10^{-5}$ ラジアン，
(2) $\pi+0.01$ ラジアン，
(3) $\pi+1/2$ ラジアン．

9.7．射影平面は球面と同じ局所幾何をもち，球面三角形の公式はこれにも適用できる．射影平面上の Flatland 人は，球面上にはいないとは局所的にはわからないだろう

が，射影平面は向き付け不能で，長距離の旅行者は鏡像状態で戻れるから，大域的にはわかる．

(10章)

10.2．正二十面体を得る．(正二十面体は20枚の三角形の面をもつ正多面体である．) 双曲平面の紙が双曲平面の幾何を近似するのと全く同じように，正二十面体は球面の幾何を近似する．

10.3．$A=\pi-(\pi/3+\pi/4+\pi/6)$

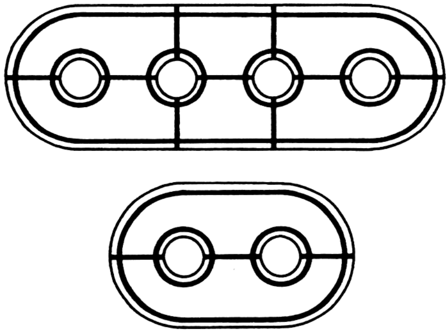
$=\pi-3\pi/4=\pi/4$．

(11章)

11.1．錐点を取り除くために正方形を球面上に置き，その隅がうまく合うまで拡張する．(これは正方形が全半球面を充たし，各隅の角が180°のときに起こる．) このとき，この曲面は等質な楕円幾何をもつ．これこそ射影平面である．(それはずっと射影平面の大域位相をもっていたが，今やっと正しい幾何を得たことになる．) 図11.1の第1の曲面も射影平面である．

11.2．*第1の曲面*：6個の隅すべてが1点に集まり，双曲幾何は逆錐点を取り除く．
第2の曲面：隅は3個からなる2グループで合う．錐点はないので，曲面はユークリッド(＝平坦な)幾何をもつ．
第3の曲面：8個の隅すべてが1点に集まり，双曲幾何は逆錐点を取り除く．
第4の曲面：8個の隅すべてが1点に集まり，双曲幾何は逆錐点を取り除く．

11.3．n穴ドーナツ曲面を隅が4個からなるグループで合う六角形に切り開くと，いつも$(4n-4)$枚の六角形を得る．(切り開き方はいろいろあっても常に同じ枚数の六角形を得る．)



11.4．まず，P^2は楕円幾何をもつ．平坦な正方形の90°の隅は4個からなるグループでうまく合うから，$P^2\#P^2$にはユークリッド幾何が与えられる．($P^2\#P^2$は，位相的にK^2と同じであるから，ユークリッド幾何が与えられることは最初からわかっていた．) 他のすべての場合，多角形の隅が4個からなるグループで合うように縮めなければならないから，射影平面の他のすべての連結和には双曲幾何が与えられる．

11.5．

	向き付け可能	向き付け不能
楕円	S^2	P^2
ユークリッド	T^2	$P^2\#P^2$ $(=K^2)$
双曲	$T^2\#T^2$ $T^2\#T^2\#T^2$ ………	$P^2\#P^2\#P^2$ $P^2\#P^2\#P^2\#P^2$ ………

(12章)

12.1．胞体分割は9個の頂点，15本の辺，7枚の面をもつ．

12.2．n角形は$n-2$枚の三角形に分解できる．n角形の角の和はすべての三角形を合わせた角の和であり，各三角形の角の和はπである．

12.3．n角形の面積は$n-2$枚の三角形の

面積の和である．各三角形の面積＝(その角の和)$-\pi$ である．したがって，n 角形の面積＝(すべての角の和)$-(n-2)\pi$ である．

12.4. 方法は球面上の多角形の場合と同じである．ただし，各三角形の面積は $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ ではなく，$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ である．求める公式は

$$A=(n-2)\pi-(\text{すべての角の和}).$$

12.7. 唯一必要な変更は，第 2 段階の

$$A=(\text{すべての角の和})-(\pi-2)\pi$$

の代りに，公式

$$A=(n-2)\pi-(\text{すべての角の和})$$

を用いることである．これは前に得たものの負の値であり，求める公式は

$$A=-2\pi\chi.$$

12.8. 図12.1(b) の胞体分割を用いて，$\chi(T^2\#T^2)=8-16+6=-2$．演習問題11.3 の胞体分割については異なった方法で同じ解答になる：$\chi(T^2\#T^2)=6-12+4=-2$．

12.9. $A=-2\pi\chi=-2\pi(-2)=4\pi$．

12.10. 図11.3 の胞体分割を用いれば，$\chi=12-24+8=-4$．(他の胞体分割は異なる数の頂点，辺，面をもつが，それらはすべて Euler 数に対して同じ解答を与える．)

$$\text{面積}=-2\pi\chi=-2\pi(-4)=8\pi.$$

12.11. $\chi(T^2)=v-e+f=1-2+1=0$．クラインの壺の Euler 数もどんな胞体分割を用いても零になる．

12.12. Euler 数はその都度 2 だけ減少する．$T^2\#T^2\#T^2\#T^2$ の Euler 数は -6 である．

12.13. 推論はトーラスの連結和の Euler 数の計算に用いたものと同じである．射影平面の連結和の胞体分割では $v=2n\times2\div4=n$, $e=2\times2n\div2=2n$ であり，勿論 $f=2$ である．したがって

$$\chi=v-e+f=n-2n+2=2-n.$$

Euler 数	向き付け可能性	
	向き付け可能	向き付け不能
2	S^2	
1		P^2
0	T^2	$P^2\#P^2$
-1		$P^2\#P^2\#P^2$
-2	$T^2\#T^2$	$P^2\#P^2\#P^2\#P^2$
-3		$P^2\#P^2\#P^2\#P^2\#P^2$
-4	$T^2\#T^2\#T^2$	etc
-5		
-6	$T^2\#T^2\#T^2\#T^2$	
-7		
-8	$T^2\#T^2\#T^2\#T^2\#T^2$	
.		
.		
.		

12.14. *図11.1*：第 1 の曲面は $\chi=3-3+1=1$ であり，向き付け不能であるから P^2 である．第 2 の曲面は $\chi=2-3+1=0$ であり，向き付け不能であるから $P^2\#P^2$ (すなわち，それは位相的にクラインの壺) である．第 3 の曲面は $\chi=1-3+1=-1$ であり，向き付け不能であるから $P^2\#P^2\#P^2$ である．

図11.2：第 1 の曲面は $\chi=1-3+1=-1$ であり，向き付け不能であるから $P^2\#P^2\#P^2$ である．第 2 の曲面は $\chi=2-3+1=0$ であり，向き付け不能であるから $P^2\#P^2$ である．第 3 の曲面は $\chi=1-4+1=-2$ であり，向き付け可能であるから $T^2\#T^2$ である．第 4 の曲面は $\chi=1-4+1=-2$ であり，向き付け不能であるから $P^2\#P^2\#P^2\#P^2$ である．

12.15. 曲率は $k=1/r^2$ であり，したがって，単位 m^{-2} で測定する．曲面の面積 A は

m^2 で計算するから，kA は $2\pi\chi$ のような単位のない量である．

12.16．射影平面の曲率は同じ半径の球面の曲率と同じである．この場合 $k=1/r^2=1/(2m)^2=1/4m^{-2}$．射影平面の面積は同じ半径の球面の面積の半分である．この場合 $A=2\pi r^2=2\pi(2m)^2=8\pi m^2$．射影平面の Euler 数は半径の大きさにかかわらず 1 であり，Gauss-Bonnet の公式は

$$\left(\frac{1}{4}m^{-2}\right)(8\pi m^2)=2\pi(1)$$

12.17．通常の通り，公式 $kA=2\pi\chi$ を用いる．$k=-0.00001m^2$ と $\chi=-4$ を代入して解き $2500000m^2=2.5km^2$ を得る．

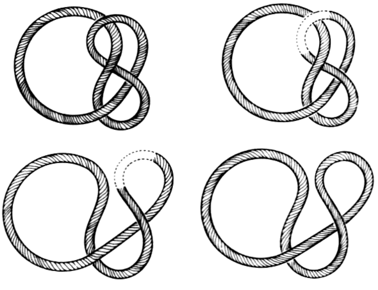
12.18．$k=-3.1658\times10^{-6}m^{-2}$, $A=1{,}984{,}707m^2$ を $kA=2\pi\chi$ に代入して $\chi=-1$ と解く．図12.3の表を調べて，$\chi=-1$ をもつ唯一の曲面は $P^2\#P^2\#P^2$ であることがわかる．（驚くべきことに，こんなに少ない初期値の情報で，これだけのものが得られる．）

12.19．$T^2\#T^2$ はもっと曲がっている．各曲面の曲率は直接計算できる．あるいは，もし巧妙にやりたければ，$T^2\#T^2$ は 2 倍の Euler 数をもつが面積は 2 倍より少ない，よって，より大きい曲率をもつと推論できる．

12.20．$kA=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ に代入して $k=-1.02\times10^{-4}km^{-2}$ と解く．次に $kA=2\pi\chi$ を用いて $\chi=-4.05$ と計算する．恐らく $\chi=-4$ である．したがって，Flatland 人の（向き付け可能な！）宇宙は $T^2\#T^2\#T^2$ の大域位相をもつ（図12.3の表参照）．恐らく χ の計算値の誤差は全面積の不正確さによるものであろう．

12.21．膨らみの中心は正の曲率をもつ（それは凸である）．しかし，その周囲は負の曲率をもつ．（それは局所的には鞍状の形である．）

（13章）



13.1．霊は綱の一部を第 4 の次元の別の部分「越し」に渡すことができる（上図参照）．その結果は，まるでその部分が他の部分を通り抜けたように見える．これで結び目のある輪がほどける．

13.2．クラインの壺の「首」を第 4 の次元に押し込む．

（14章）

14.3．元は風船の外側であったが今では事実上その内側になっている所に閉じ込められていることに気づく！（吹き口は合わないし，風船も傷つけたくないと仮定すると）どうすれば逃れられるか？

14.4．まず第 1 に，弧の10分＝1 度の1/6＝0.003ラジアン．もし Gauss が彼の測定機器で差を見つけられるならば，Gauss の三角形の角は少なくとも 0.003 ラジアンだけ π を越えているはずである．三角形の面積は約 $4000km^2$ であるから，Gauss が検出できるとすれば公式

$$kA_\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$$

を用いて曲率 k は少なくとも

$$((\alpha+\beta-\gamma)-\pi)/A=(0.003)/(4000\ km)$$
$$=0.000001\ km^{-2}$$

と導き出せる．これは半径がせいぜい 1000

kmの宇宙に対応する！（公式 $k=1/r^2$ を用いよ.）明らかに，現実の宇宙はこれ程小さくはない！

14.5．円柱の端を(裏返しではなく)180°回転して互いに貼り付ける.したがって,貼り付けた円柱は位相的にはトーラスである．Flatland人は鏡像状態で出発点には決して戻らないので，これは向き付け可能である．3次元の蟻はこの曲面の1つの側から他の側へ行けないので両側である．

14.6．球体の中心を通る円板は P^3 における射影平面をなす．そのような任意の射影平面は向き付け不能で単側である．（P^3 のような向き付け可能の3-多様体では,任意の向き付け可能な曲面は両側で，任意の向き付け不能な曲面は単側である.）

(15章)

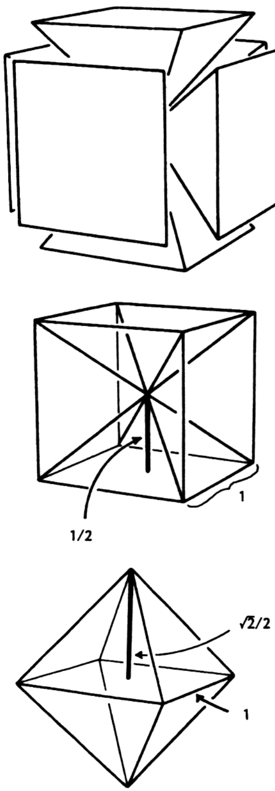
15.1．我々の宇宙は H^3 の局所幾何をもつかもしれないが，その曲率はとても小さいからまだ見つけてはいない．（ところでGaussが見つけたであろう最小の負の曲率は何か？　演習問題14.4参照.）

15.2．それは彼等には無限に見えるであろう．彼等の頭脳は経験から彼等の眼がどんなに寄り目になっているかに基づいて正確に距離が判断できるであろう．彼等に我々の宇宙はどう見えるのであろうか？

(16章)

16.1．4個のすべての隅は1つのグループで集まる.（貼り付け方を考慮すれば，各隅は他の3個と「隣接」しているといえる.）隅は尖がりすぎてきちんと合わないので，四面体は超球面で拡張しなければならない.これはその多様体に楕円幾何を与える.

16.2．立方体の隅はそれぞれ4個の隅からなる2つのグループで合う.（各隅はそのグループで他の3個の隅に隣接するが他のものには隣接しない.）隅が小さすぎるので4個からなるグループできちんと合わない．その多様体は楕円幾何をもつことになる．

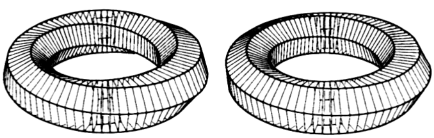


16.3．八面体の6個の隅は1つのグループで合う．その正確な形は上の最初の2つの図に示されている．各隅は残りの5個の隅の4個に隣接し，それら4個の各々は第5番目の隅に隣接する．いま問題となるのは隅が細すぎるか,太すぎるか,丁度よいかで

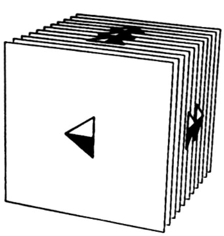
ある．前ページの中央の図の立方体を構成する 6 個の各ピラミッド角錐と同じ位に隅のそれぞれが丁度尖っていればよいであろう．1 つの方法は（勿論,唯一の方法ではないが）ピタゴラスの定理を用いて,八面体の上半分はその高さが底面の 1 辺の約0.7倍のピラミッド角錐であり，一方，中央の図の 6 個のピラミッド角錐のそれぞれは高さがその底面の 1 辺の正確に0.5倍になっていることを求めることである．このことにより,八面体の隅は少し尖りすぎて,八面体空間は楕円幾何をもつことになるのがわかる．

(17章)

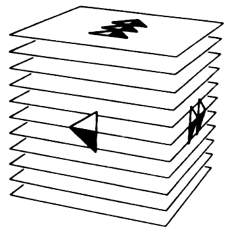
17.1.



17.2.

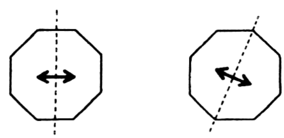


円上のトーラス束



円上のクラインの壺束

17.3. 1/8，1/4，3/8，1/2回転で上面を下面に貼り付ける．また，次の図に示すような 2 種類の裏返しでも貼り付けられる．ただし，この裏返しでは図17.4のような 3 次元空間におけるうまい図は描けない．(興味のあることだが，この 2 つの裏返しは位相的には異なる多様体を与える．)



裏返し　　**裏返し**

17.4. トーラスとクラインの壺．ところで，相対する辺を貼り付けたメービウスの帯はクラインの壺である．



メービウスの帯　　**クラインの壺**

17.5. ソリッド（中身の詰まった）円柱を考え，裏返して 1 つの縁を他の縁に貼り付ける．得られたものは円板からなる円であるが，それは積ではない．(Flatland 人が物理的に平面でメービウスの帯を作れないように，物理的に 3 次元空間でこの貼り付けを

実行できない.)

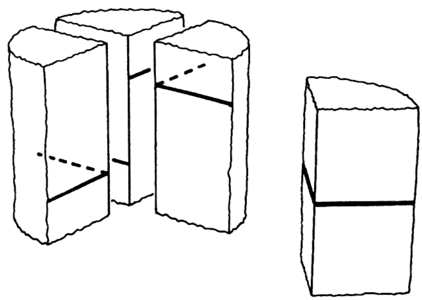
17.6. $S^2 \times I$ を厚みのある球面状の殻であると想像する. 最も普通の方法で内側の曲面を外側の曲面に貼り付けると $S^2 \times S^1$ が得られる. あるいは, 裏返して内側の曲面を外側の曲面に貼り付けると向き付け不能な円上の球面束 K^3 が得られる. 内側の曲面を外側の曲面に貼り付ける何か他の方法——例えば内側の球面のそれぞれの点を外側の球面の対心点に貼り付けるような——では, すでに述べた2つのうちの1つと位相的に同じである多様体が得られる. (これは, 回転せずに円柱の縁を貼り付けて得られるトーラスと幾何的には異なるが位相的には同じである曲面を得るために, 何分の1かの回転をして円柱の縁を貼り付けるようなものである. 位相的に異なる曲面を得るには, 裏返して円柱の縁を貼り付けるような, もっと徹底的なことをしなければならない.) 最も簡単な方法で (中身の詰まった球体（ソリッドボール）) ×区間 の縁を貼り付けることにより超立体（ハイパーソリッド） $S^2 \times S^1$ を作ることができる. 超立体（ハイパーソリッド） K^3 を作るには, 裏返して縁と縁を貼り付けなくてはならない. これらの4次元多様体を理解するには, Square 氏が通常のソリッド (中身の詰まった) トーラスとかソリッド (中身の詰まった) クラインの壺をどのように理解しようとするか考えればよい.

17.7. 演習問題7.4の3つの多様体および $K^2 \times S^1$.

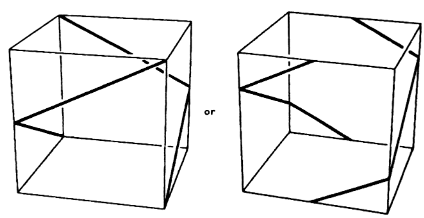
17.8. プリズムの上面を底面に貼り付けて, 円の八角形を得る. そして, 相対する側面を貼り付けて円の2穴ドーナツ曲面を得る. (相対する側面を貼り付けた八角形は $T^2 \# T^2$ の位相をもつ.)

17.9. 垂直のスパゲティで一杯の図8.2の各立方体を想像する. 立方体の上面を底面に貼り付けるとき, スパゲティは円になり, したがって, それぞれの場合に何らかの種類の円束を得る. 第1のものは向き付け可能なトーラス上の円束, 第2のものは向き付け不能なクラインの壺上の円束, 第3のものは向き付け不能なトーラス上の円束, 第4のものは向き付け可能なクラインの壺上の円束である.

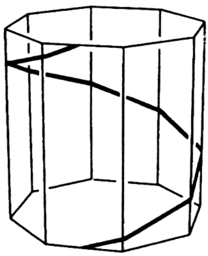
17.10. 任意の3本の垂直の辺は水平の線が合うように貼り付けられるが, 第4の辺は同時に2つの異なる「高さ」にしなければならないから貼り付けられない. 正則な捩れたトーラスではこの問題は起こらない.



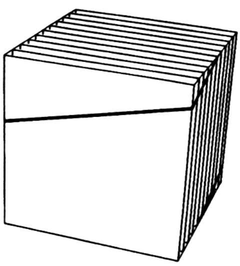
17.11.



17.12.



17.13. 驚いたことに，捩れたトーラスは円上のトーラス束である：次の図のように薄く切るとき，剪断変形はあるが，その各切片は位相的にトーラスであることに注意する．それでも，捩れたトーラスは，トーラスからなる円になる状態が円からなるトーラスになる状態と無関係であるから，積ではない．



（18章）

18.1. K^3（演習問題 17.6 参照）．

18.2. 曲面が S^2, P^2, T^2, K^2 でない限り，任意の曲面×円．多くの円上の曲面束も $H^2 \times E$ 幾何をもつ．（特別な例については演習問題 17.3 参照．）

18.3. K^3, $P^2 \times S^1$ は向き付け不能であるが，$S^2 \times S^1$ とこの新しい多様体は向き付け可能である．この新しい多様体はいくつかの点で 3 次元射影空間に似ている：（厚みのある球面殻と考えた）$S^2 \times I$ の内側の曲面か外側の曲面を出発すると鏡像状態ではなく回転してその同じ曲面の対心点に戻る．

18.4. 違う．捩れたユークリッド幾何をもつ 3－多様体では，出発点の下に戻るには，時計廻りか反時計廻りかどちらかで旅しなければならないことが容易にわかる．例えば，そういう多様体にいて，小さな時計廻りの円で水平に旅すると出発点の下に戻れることがわかったとする．友人の 1 人は多様体の遥かな地域を通る長い旅に出る．道中ずっと時計廻りの小さな円の動きで出発点の下に戻れることを観察し続ける．彼が長い旅より戻ってもまだ時計廻りに動くと出発点の下に戻れることを観察する．これは彼が鏡像状態でないことを示す！　というのは，もし彼が鏡像状態ならば，出発点の下に戻るには*反時計廻り*の円で動くのが必要になるように見えるであろう．これは旅人が決して鏡像状態で家に戻ることはないことを証明しており，したがって，その多様体は向き付け可能である．

18.5. 演習問題 17.12 の多様体でよい．

（19章）

19.1. この演習問題のなかで求められた公式によれば，Hubble 定数が15(km/秒)/(100万光年)のとき，Hubble時間は1/15(100万光年)(秒)/(km)である．問題はその答えを何か人間に理解可能な単位，例えば，年の単位にすることである．このために

1 年＝365.25日＝8766時間
＝525960分＝31557600秒

であることを知る必要がある．これにより光が 1 秒間に300000km 進み，したがって，

1 年に

$$300000 \times 31557600 = 9.47 \times 10^{12}\mathrm{km}$$

進むということが導き出せる．したがって，100万光年は9.47×10^{18}km である．このとき，Hubble 時間を秒に変えられる：

1/15(100万光年)(秒)/(km)
=1/15(9.47×10^{18}km)(秒)/(km)
=(1/15)(9.47×10^{18})(km)(秒)/(km)
=6.31×10^{17}秒．

最後に，31557600で割り算をして Hubble 時間を年で得る：

(6.31×10^{17}秒)÷(31557600秒/年)
=2.0×10^{10}年．

すなわち，これは200億年である．もし Hubble 定数を倍にして 30(km/秒)/(100万光年)とすると，Hubble 時間は半分になって100億年になる．

文献案内

1. Abbott, E. A., *Flatland：A Romance of Many Dimensions*, Dover, New York, 1952.
2. Burger D., *Sphereland*, Barnes and Noble, New York, 1983.
3. Gamow, G., *Mr. Tompkins in Paperback*, Cambridge, 1971.

Flatland と *Sphereland* は本書のすべての読者に一読を勧めます！ Mr. Tompkins は無邪気な銀行員が相対性理論的な効果や量子論的な効果が日常的現象である世界を夢想する，おもしろく，ためになる話を集めたものである．物語 #5 The Pulasating Universe は膨張し —— そして再崩壊する —— 超球面を生き生きと物語っている．

4. Griffiths, *Surfaces*, 2nd ed., Cambridge, 1981.

本書は読み易く，興味深く，大切な問題を論じている．特に Morse 理論の非常に簡単な良い説明がある．

5. Rucker, R., *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension,* Dover, New York, 1977.

これはおもしろい本である．幾何，物理，哲学と話が飛び廻る．Rucker は最近この著書を検討し直し，次のように再刊した．

6. Rucker, R., *The Fourth Dimension*, Houghton-Mifflin, 1984.

時空の哲学的意味を理解したいならば，これは是非読むべきである．

7. Hilbert, D. and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination,* (*Anshauliche Geometrie,* 1932 の英訳), Chelsea, New York, 1952.
8. Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry,* Wiley, New York, 1968.

上の 2 冊は幾何に関しての一般的な良い参考書である．初めから終りまで読めるが，興味を惹く節をどこなりと拾い読みする方がよい．

9. Guilleman, V. and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.

これは近代的な微分位相幾何学への素晴らしい入門書である．沢山の美しいト

ピック —— 私の好きなものは，ベクトル場と写像度 —— を網羅しているが，それには最小の予備知識，すなわち，微分積分と線型代数しか必要としない．（微分位相幾何学入門に関する他書と比べるとこれは最小である．）

10．Armstrong, M. A., *Basic Topology,* McGraw-Hill, England, 1979.
これは位相空間論と代数的位相幾何学への良い入門書である．それには線型代数と初等群論の予備知識が必要である．

11．Rolfsen, D., *Knots and Links*, Publish or Perish, Berkeley, 1976.
本書の続編として是非 *Knots and Links* をお勧めする．前もって必要なものは抽象代数と代数的位相幾何学を少々．

12．Seifert, H. and W. Threfall, *A Textbook of Topology,* (*Lehrbuch der Topologie,* 1934 の英訳), Academic Press, New York, 1980.
この本が古いと考えないように，この本のアイディア（ホモロジー論，基本群，被覆空間，3-多様体，Poincaré 双対性，絡み数）は 1934 年当時も今も興味があり，また意味のあるものである．

13．Thurston, W., *Three-dimensional Geometry and Topology,* Princeton Univ. Press, (to appear).
我々の第18章を予告編と考えれば，*Three-dimensional Geometry and Topology* が本編である．詳細を理解するには数学の強力な予備知識が必要になるが，そういう予備知識がなくても楽しめる例が沢山ある．

索　引

—マ—

—ヤ—

—ラ—

〔訳者略歴〕

三村　護
昭和35年京都大学理学部数学科卒業，
現在岡山大学理学部教授．
著書・訳書　ホモトピー論（共著，紀伊國屋書店，1975）
数学＝創造された宇宙(上・下)（共訳，紀伊國屋書店，1977）
リー群の位相(上・下)（共著，紀伊國屋書店，1978，1979）
線型代数演習と解法（現代数学社，1980）
微分積分演習と解法（現代数学社，1980）
不確実性の数学(上・下)（共訳，紀伊國屋書店，1984）
現代数理科学入門（共著，共立出版，1985）
やさしい線形代数（共著，内田老鶴圃，1985）
ホップ空間（紀伊國屋書店，1986）
数学人群像（共訳，近代数学社，1987）
数学点描（訳，近代数学社，1989）
無限の彼方へ（共訳，現代数学社，1989）
ホモトピー論（訳，共立出版，1989）

入江　晴栄
昭和36年奈良女子大学文学部英米学科卒業．
現在，高松第一高等学校教諭．
昭和62年より一年間エッカード大学留学．
訳書
不確実性の数学(上・下)（共訳，紀伊國屋書店，1984）
無限の彼方へ（共訳，現代数学社，1989）

曲面と３次元多様体を視る

1996年２月24日　初版第１刷

著　書　ジェフリー・R. ウィークス

訳　者　三村　護，入江　晴栄

発行所　現　代　数　学　社

京都市左京区鹿ヶ谷西寺之前町１　〒606
振替01010-8-11144　TEL(075)751-0727

印刷／牟禮印刷㈱　　　製　本／兼文堂

ISBN4-7687-0315-1　C3041

定価はカバーに表示してあります．